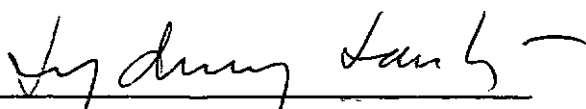


FLAMBAGEM LOCAL DE PAREDES ASSOCIADAS

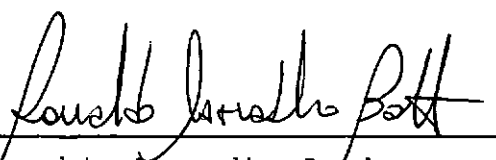
Sonia Maria Borba

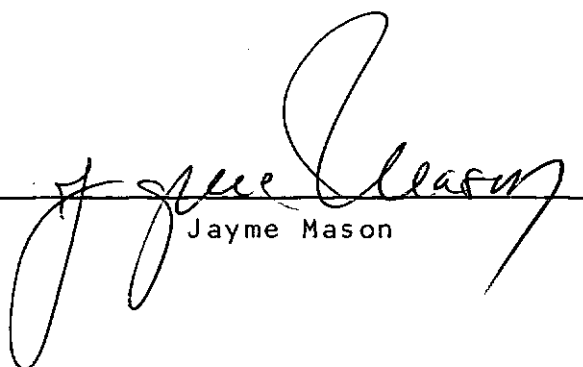
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

  
Sydney Martins Gomes dos Santos

  
Paulo Alcantara Gomes

  
Ronaldo Carvalho Batista

  
Jayme Mason

BORBA, SONIA MARIA

FLAMBAGEM LOCAL DE PAREDES ASSOCIADAS (Rio de Janeiro),  
1984.

XIII, 143 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil,  
1984).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Flambagem de Paredes Retangulares Associadas

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

Ao meu filho

Otto Luís Borba Vilela

e à minha mãe

Olívia U. Borba

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sydney Martins Gomes dos Santos pela amizade, apoio e orientação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

À todos os Professores da COPPE/UFRJ e do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia pelos ensinamentos recebidos.

Ao meu filho, à minha mãe e irmãos, pela amizade, força e incentivo.

A UFU (Universidade Federal de Uberlândia) especialmente ao Departamento de Matemática e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES-PICD) que financiaram meus estudos de Pós-Graduação.

Ao Prof. Celso Correa dos Santos, Chefe do Núcleo de Computação Eletrônica da UFU. Aos amigos do Departamento de Matemática da UFU e ao Marcio Aurélio Ribeiro Moreira pela demonstração de amizade.

Aos amigos e colegas da COPPE/UFRJ pela dedicação e companheirismo.

À Maria José, pela excelente elaboração gráfica deste trabalho.

Ao Gilmar pelo esmerado trabalho de desenho.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

## FLAMBAGEM LOCAL DE PAREDES ASSOCIADAS

Sônia Maria Borba

Novembro, 1984

Orientador: Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos

Programa : Engenharia Civil

O estudo da estabilidade de uma estrutura formada pela associação de paredes se fundamenta no estudo da estabilidade de paredes isoladas.

Neste trabalho, através da dedução da equação diferencial de uma parede retangular e do princípio da energia potencial, obtém-se o valor da tensão crítica atuante.

O resultado obtido é utilizado no estudo da estabilidade de uma estrutura formada pela associação de quatro paredes retangulares ligadas pelos bordos longitudinais.

As equações gerais obtidas neste trabalho mostraram que, com as hipóteses adotadas, a flambagem local é pouco influenciada, pela associação de paredes múltiplas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

## LOCAL BUCKLING OF ASSOCIATE WALLS

Sônia Maria Borba

November, 1984

Chairman : Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos

Department: Civil Engineering

The study of the stability of a structure composed by the association of walls is based on the study of the stability of isolated walls.

In the present work, it is obtained the value of critical tension, through the application of the differential equation for rectangular wall and also through the potential energy principle.

The result obtained is used in the study of the stability of a composed structure by the association of four rectangular walls joined along their longitudinal edges.

The general equations obtained herein showed that with the hypothesis adopted, the local buckling is not largely influenced by the association of multiple walls.

NOMENCLATURA

$O_x, y, z$	-	Eixos coordenados
$a$	-	Largura da parede
$b$	-	Comprimento da parede
$h$	-	Espessura da parede
$q_1$	-	Carregamento transversal
$u, v, w$	-	Componentes de deslocamento
$D$	-	Rigidez à flexão da parede
$M_x, M_y$	-	Momentos fletores
$M_{xy}, M_{yx}$	-	Momentos torçores
$Q_x, Q_y$	-	Esforços cortantes
$V_x$	-	Esforço cisalhante transversal efetivo
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	-	Componentes de deformação
$\sigma_x, \sigma_y$	-	Tensões normais
$\tau_{xy}, \tau_{yx}$	-	Tensões cisalhantes
$E$	-	Módulo de elasticidade do material
$\nu$	-	Coeficiente de Poisson
$G$	-	Módulo de elasticidade transversal
$\psi$	-	Ângulo de rotação da secção

- $w$  - Deflexão ou flecha da parede
- $\nabla$  - Operador diferencial
- $F_x, F_y$  - Forças normais aplicadas nos bordos, atuando na superfície média
- $N_x, N_y$  - Carregamento axial
- $\beta, \beta_1$  - Ângulos formados entre a força normal na configuração defletida da parede e a sua componente em x
- $N_{xy}, N_{yx}$  - Carregamento cisalhante
- $V$  - Energia potencial das forças externas
- $W_e$  - Trabalho executado pelas forças externas
- $U$  - Energia de deformação
- $W_i$  - Trabalho executado pelas forças internas
- $\pi$  - Potencial total da parede
- $\ell, \ell_1$  - Comprimentos de um elemento linear da parede, antes e depois da deformação
- $\epsilon'_x, \epsilon'_y, \gamma'_{xy}$  - Componentes de deformação levando-se em conta a parcela de deformação, devida ao deslocamento  $w$
- $\ell_1, m_1, n_1$  e  $\ell_0, m_0, n_0$  - cossenos diretores dos elementos  $O_1A_1$  e  $O_1B_1$ , respectivamente (Figura 11.12)
- $T_1, T_2$  - Trabalhos executados pelas cargas agindo no plano médio e pelo carregamento transversal, respectivamente
- $X, f$  - Funções arbitrárias de  $x$



- $m$  - Número de meias ondas de flambagem na direção perpendicular ao carregamento
- $n$  - Número de meias ondas de flambagem na direção do carregamento
- $\mu$  - Parâmetro definido na Equação (III.6)
- $\sigma_c$  - Tensão crítica
- $C_1, C_2, C_3, C_4$  - Constantes arbitrárias
- $r_1, r_2$  - Parâmetros definidos na Equação (III,9)
- $\bar{\xi}$  - Fator de proporcionalidade entre o momento fletor atuante no bordo da parede e a sua rotação
- $\psi$  - Ângulo de rotação da parede
- $\bar{\psi}$  - Ângulo de rotação de placas
- $\xi$  - Coeficiente de vinculação da parede
- $\phi$  - Razão do comprimento e largura da parede
- $K$  - Coeficiente de flambagem da parede
- $p, q$  - Parâmetros dependentes do coeficiente de vinculação
- $s_1, t_1, z_1$  - Parâmetros definidos na Equação (III,43, 44, 45)
- $\alpha, \beta$  - Parâmetros definidos na Equação (III.55)
- $\gamma, \delta$  - Parâmetros definidos na Equação (III,57)
- $r, s$  - Parâmetros definidos na Equação (III.63)
- $p, q$  - Parâmetros definidos na Equação (III,61, 62)

ÍNDICE

Pág.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO . . . . .	1
CAPÍTULO II - INSTITUIÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PAREDE COM FORÇAS AXIAIS (ELEMENTO PAREDE). .	4
II.1 - Introdução . . . . .	4
II.2 - Equação Diferencial da Parede, em Coordenadas Cartesianas, Levando-se em Conta Somente Cargas Transversais . . . . .	6
II.2.1 - Relações Entre Tensões, Deformações e Deslo- camentos . . . . .	6
II.2.1.1 - Convenção de Sinais . . . . .	7
II.2.2 - Esforços Internos Expressos em Função da Deflexão $w$ . . . . .	14
II.3 - Equação Diferencial da Parede em Coordenadas Cartesianas, Levando-se em Conta Cargas Axiais .	18
II.4 - O Método de Energia . . . . .	25
II.4.1 - Introdução . . . . .	25
II.4.2 - O Potencial Total $\pi$ , da Parede . . . . .	28
II.4.2.1 - Energia de Deformação da Parede Fletida sob a Ação de Carga Lateral . . . . .	28

11.4.2.2 - Energia de Deformação da Parede sob a Ação de Cargas Contidas no seu Plano Médio . . . . .	30
<u>CAPÍTULO III - FLAMBAGEM DO ELEMENTO PAREDE</u> . . . . .	38
III.1 - Equações Auxiliares . . . . .	38
III.1.1 - Condições de Apoio dos Bordos Descarregados . .	41
III.1.1.1 - Parede Elasticamente Vinculada nos Bordos b . .	41
III.1.1.2 - Parede Simplesmente Apoiada nos Bordos b . . . .	46
III.1.1.2.1 - Introdução dos Parâmetros p e q . . . . .	48
III.1.1.3 - Parede Elasticamente Vinculada em um dos Bordos Descarregados b e Livre no Outro . . . . .	53
III.1.2 - Resultados Obtidos pelo Método de Energia e pela Equação Diferencial . . . . .	60
III.1.2.1 - Bordos Descarregados $x=0$ , $x=a$ , Simplesmente Apoiados . . . . .	60
III.2 - Equações Características . . . . .	65
<u>CAPÍTULO IV - ASSOCIAÇÃO DE PAREDES</u> . . . . .	67
IV.1 - Introdução . . . . .	67
IV.2 - Considerações Básicas . . . . .	69

IV.3	-	Equações Gerais de Estabilidade . . . . .	72
<u>CAPÍTULO V - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</u> . . . . .			78
V.1	-	Estrutura Composta de uma Única Parede . . . . .	78
V.1.1	-	Parede de Dimensões $\underline{a}$ , $\underline{b}$ Apoiada nos Quatro Bordos . . . . .	78
V.1.2	-	Parede de Dimensões $\underline{a}$ e $\underline{b}$ Apoiada nos Bordos $\underline{a}$ Livre em uma dos Bordos $\underline{b}$ e Apoiada no Outro .	84
V.1.3	-	Parede de Dimensões $\underline{a}$ e $\underline{b}$ Apoiada nos Bordos $\underline{a}$ e em um dos Bordos $\underline{b}$ e Engastada no Outro . . .	88
V.2	-	Estrutura Composta de Mais de uma Parede . . . . .	92
V.2.1	-	Estrutura Formada pela Associação de Quatro Paredes de Dimensões $\underline{a}$ e $\underline{b}$ . . . . .	92
<u>CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES</u> . . . . .			102
<u>APÊNDICE I - EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS</u> . . . . .			103
A.1	-	Bordos Descarregados $x=0$ , $x=a$ Engastados . .	103
A.2	-	Bordos Descarregados $x=0$ Engastado e $x=a$ Simplesmente Apoiado . . . . .	111
A.3	-	Bordos Descarregados $x=0$ Simplesmente Apoiado e $x=a$ Livre . . . . .	113

A.4	-	Bordos Descarregados $x = 0$ Engastado e $x = a$ Livre . . . . .	114
A.5	-	Bordos Descarregados $x = 0$ Simplesmente Apoiado e $x = a/2$ no Plano de Simetria . . . . .	116
A.6	-	Bordos Descarregados $x = a$ Engastado e $x = a/2$ no Plano de Simetria . . . . .	117
 <u>APÊNDICE II - PROGRAMAS PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES (V.24,</u>			
<u>V.31 e V.58)</u> . . . . .			119
 <u>APÊNDICE III - RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES. (V.56)</u> . . .			124
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .			141

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Qualquer estudo da estabilidade de paredes é precedido pela teoria da flexão, conduzindo a uma equação diferencial que relaciona cargas aplicadas, rigidez à flexão e curvatura. A teoria da flexão de paredes tem sido discutida em detalhes por um grande número de autores, tendo sido a equação (11.29) primeiramente deduzida por Lagrange em 1811 e Navier em 1820.

Se, em adição à cargas laterais houverem cargas aplicadas nos seus bordos, agindo no plano médio, o efeito na flexão e na estabilidade da parede deve ser considerado. Tem-se então a equação (11.33) que foi primeiramente deduzida por Saint Venant, em 1883.

A equação (11.33) ou formas modificadas da mesma é a base do estudo da estabilidade de paredes, discutido neste trabalho.

Quando houver uma combinação de cargas laterais e cargas agindo nos seus bordos, no plano médio, como pode ser mostrado na equação (11.33), observa-se que o efeito das cargas de compressão aplicadas nos bordos da parede aumenta as deflexões que normalmente ocorreriam se só cargas laterais atuassem. Aumentando o valor das cargas de compressão agindo nos bordos da parede, chega-se a uma etapa na qual as deflexões se tornam muito grandes tendendo a crescer indefinidamente, caracterizando a instabi

lidade da estrutura. O menor valor da carga de compressão que a estrutura pode suportar sem alcançar essas características define a sua instabilidade.

Se na parede não atuar carregamento lateral, ou seja, atuar somente forças de compressão nos bordos, a instabilidade ocorre quando a energia da parede numa forma ligeiramente fletida for igual à sua energia na configuração plana inicial, sob a ação da mesma carga de compressão. Esta é a definição de equilíbrio neutro e a força de compressão nos bordos da parede, que o caracteriza, é a carga crítica da parede. Se a energia da parede for maior quando na forma ligeiramente fletida, diz-se que a estrutura é estável. A carga crítica é assim, a carga de compressão dos bordos da parede, capaz de mantê-la numa forma ligeiramente fletida.

A história da teoria da estabilidade de paredes sob compressão dos bordos é, pois, bem antiga.

Em 1891, Bryan apresentou a análise de uma parede retangular simplesmente apoiada em todos os bordos e uma carga de compressão uniformemente distribuída, agindo em dois bordos opostos, no plano da parede. Foi, também, o primeiro a aplicar o método de energia para a solução do problema de flambagem de paredes, método este que veio a ser um poderoso instrumento para a pesquisa de todos aqueles problemas de estabilidade elástica, que não poderiam ser resolvidos pelos métodos convencionais, pela dificuldade do tratamento matemático.

Mais de 15 anos depois, o problema de flambagem de parede retangular foi abordado por Timoshenko e Reissner. Timoshenko, em suas publicações, discutiu a estabilidade de paredes sob várias condições de apoio e forças de compressão agindo em dois bordos paralelos, no plano da parede.

Outros pesquisadores como Rös, Eichinger, Bijlaard e Ilyushin fizeram pesquisas neste campo, incluindo também experiências. Suas publicações constituem passos importantes em direção à solução do problema de instabilidade de paredes.

Através de várias etapas, tem-se procurado, neste trabalho, através do desenvolvimento matemático, determinar a tensão crítica que atua em estruturas formadas pela associação de várias paredes delgadas retangulares.

Inicialmente procura-se instituir a equação diferencial da parede sujeita à cargas axiais. Em seqüência, tem-se o estudo da flambagem do elemento parede com a dedução das equações auxiliares que permitem calcular os valores do coeficiente de vinculação e do coeficiente de flambagem de paredes para diversas condições de apoio, com o conseqüente cálculo da carga crítica.

O fechamento deste trabalho se faz com exemplos de aplicação a estruturas diversas, dentre elas uma nova forma estrutural gerada pela associação de quatro paredes retangulares delgadas.



## CAPÍTULO II

### INSTITUIÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PAREDE COM FORÇAS AXIAIS (ELEMENTO PAREDE)

#### II.1 - INTRODUÇÃO

Este estudo se limita às paredes delgadas retangulares com pequenas deformações, solicitadas por cargas transversais e cargas atuando na sua superfície média (Figura II.1).

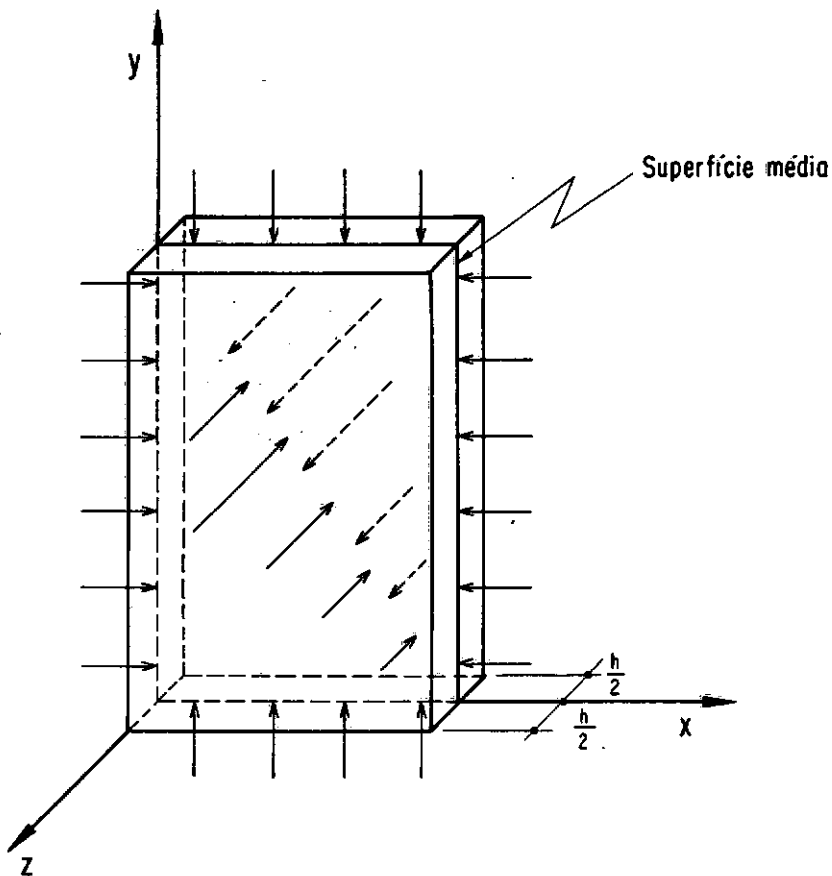


Figura II.1

Considerando, inicialmente, somente a ação de cargas transversais (Figura II.2),

A teoria de pequenas deflexões devida a Kirchhoff e Love baseia-se nas seguintes hipóteses:

- 1.<sup>a</sup>) O material da parede é elástico, homogêneo e isotrópico;
- 2.<sup>a</sup>) A parede é inicialmente plana;
- 3.<sup>a</sup>) A espessura ( $h$ ) da parede é pequena, comparada com as suas outras duas dimensões. A menor dimensão lateral da parede é pelo menos, 10 vezes maior que a sua espessura;
- 4.<sup>a</sup>) A deflexão ( $w$ ) da parede é produzida pelo deslocamento dos pontos da superfície média, normal ao seu plano inicial;
- 5.<sup>a</sup>) As deflexões são pequenas comparadas com a sua espessura. A máxima deflexão de  $1/10$  a  $1/5$  da espessura é considerada como limite, na teoria das pequenas deflexões. Este limite pode também ser estabelecido em função do comprimento, isto é, a máxima deflexão é menor que  $1/50$  da menor dimensão lateral;
- 6.<sup>a</sup>) As inclinações da superfície média defletida são pequenas, comparadas com a unidade;
- 7.<sup>a</sup>) As deformações são tais que, linhas retas inicialmente normais à superfície média, permanecem

retas e normais à superfície média (as deformações devidas ao cisalhamento transversal são desprezíveis).

8ª) As tensões normais à superfície média são desprezíveis.

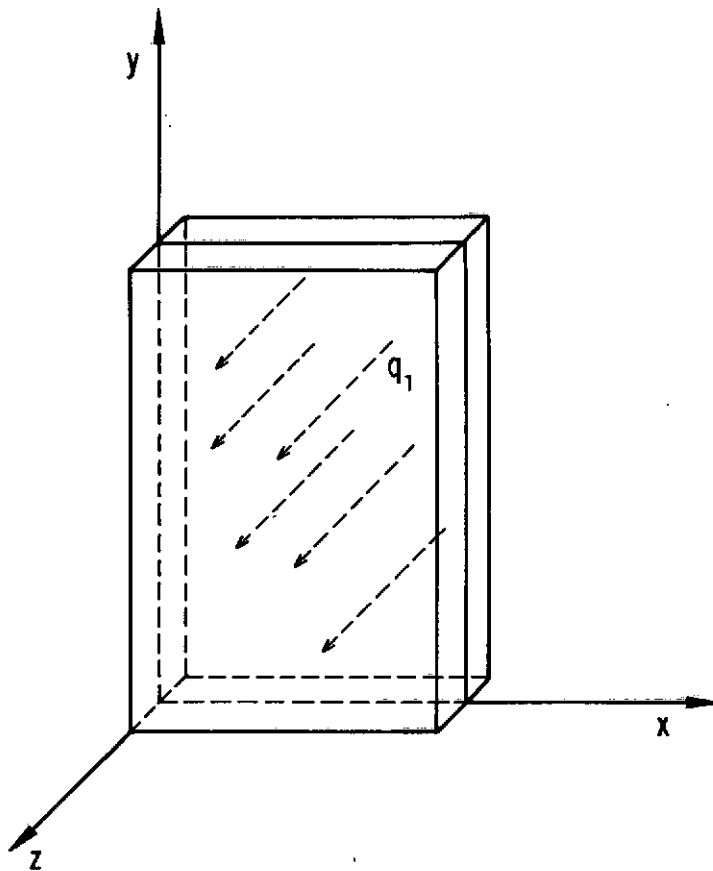


Figura 11,2

## 11,2 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PAREDE, EM COORDENADAS CARTESIANAS, LEVANDO-SE EM CONTA SOMENTE CARGAS TRANSVERSAIS

### 11,2,1 - Relações entre Tensões, Deformações e Deslocamentos

Seja o elemento infinitesimal, cortado da parede por

dois pares de planos respectivamente paralelos aos planos  $xz$  e  $yz$  (Figura 11.3).

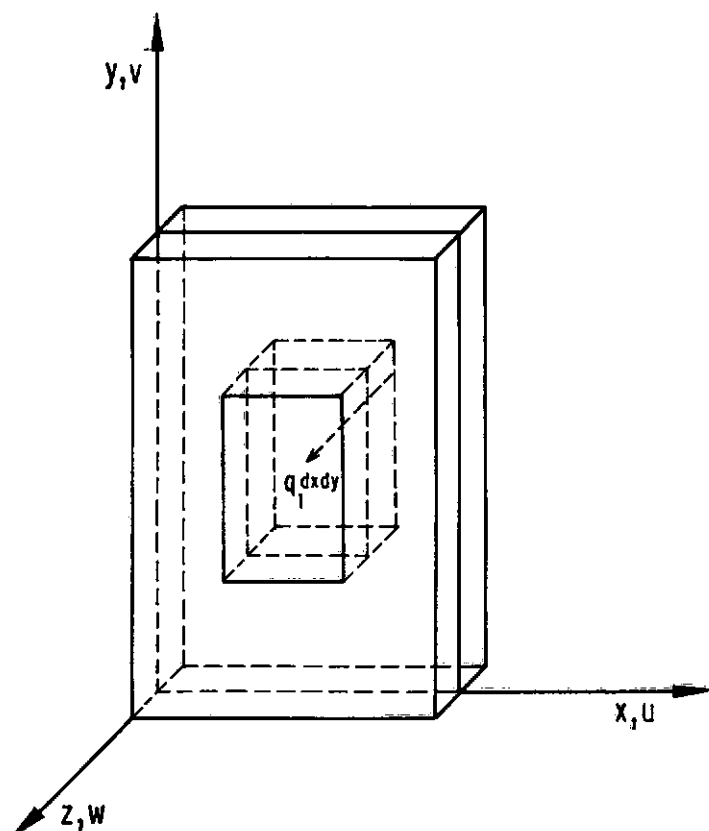


Figura 11.3

Quando a parede é solicitada por forças externas, ela se deforma, produzindo tensões e deformações que dão origem aos esforços internos.

#### 11.2.1.1 - Convenção de Sinais

- As forças externas e internas e as componentes de deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , são positivas quando a sua direção coincidir com a direção dos eixos coordenados;

- Na face de normal positiva, a tensão é positiva no sentido positivo do eixo (Figura 11.4.a);
- Os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  são positivos se produzirem tração do lado de  $z$  positivo e consequentemente compressão do lado de  $z$  negativo;
- Os momentos torsores  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  são positivos se, na face de normal positiva, tiverem seus vetores, respectivamente, no sentido positivo de  $x$  ou de  $y$ ;
- Os cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  são positivos se, na face de normal positiva, tiverem seus vetores coincidentes com o eixo  $z$  (Figura 11.4.b).

#### 11.2.1.2 - Relações Básicas

A hipótese de que o material é elástico, permite o uso da lei de Hooke, bidimensional.

$$\sigma'_x = E \epsilon_x + \nu \sigma_y \quad (11.1)$$

$$\sigma'_y = E \epsilon_y + \nu \sigma'_x \quad (11.2)$$

De (11.1) e (11.2) tem-se

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon'_x + \nu \epsilon_y) \quad (11.3)$$

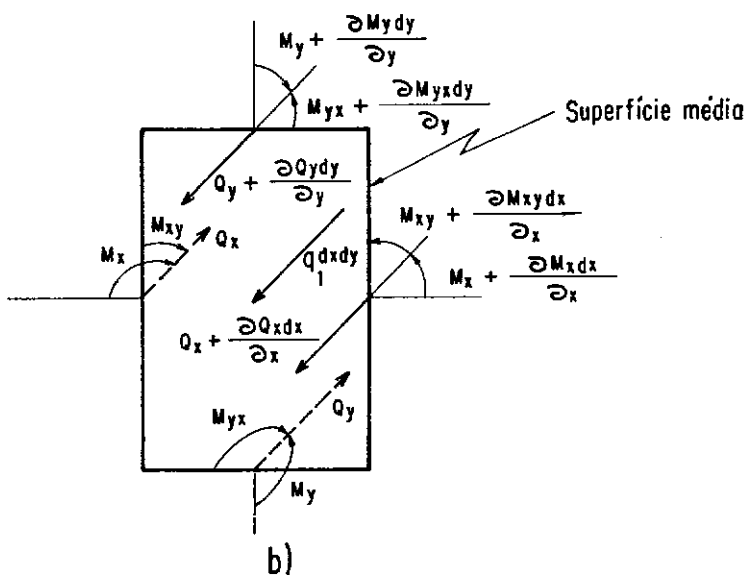
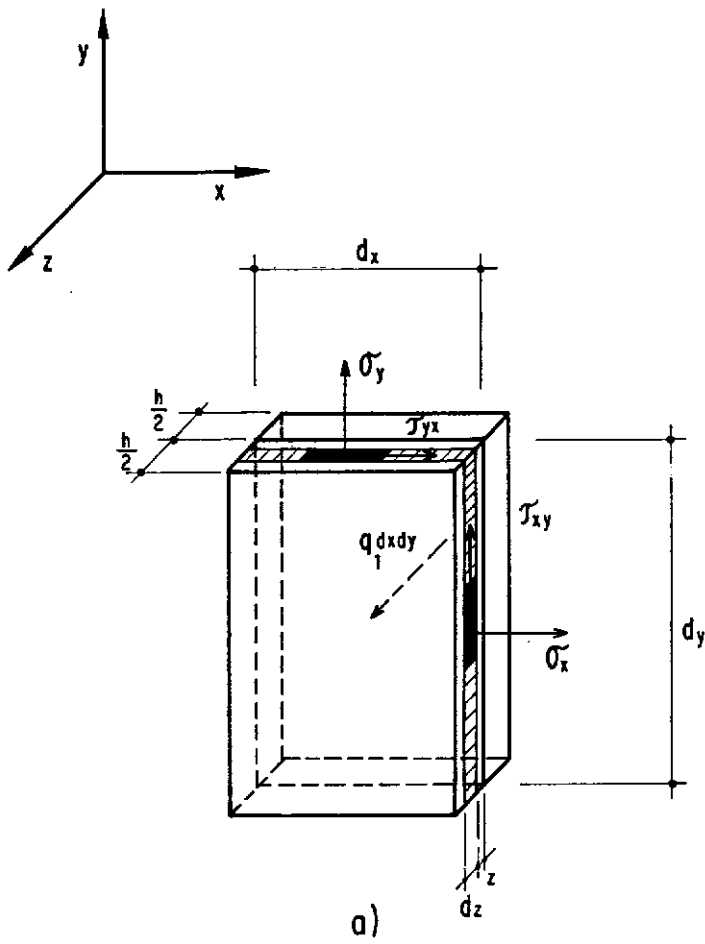


Fig. II.4

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (11.4)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (11.5)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (11.6)$$

Seja a secção da parede por um plano paralelo ao plano  $xz$  antes e depois da deflexão (Figura 11.5).

$\psi$  - ângulo de rotação da linha I-I

$\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$  - ângulo de rotação da linha II-II

Seja a fibra AB localizada a uma distância  $z$  da superfície média, antes da deflexão.

Após a deflexão, a fibra AB se desloca para a posição A'B'.

Temos que:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dx + z \frac{\partial \psi}{\partial x} dx) - dx}{dx} = z \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11.7)$$

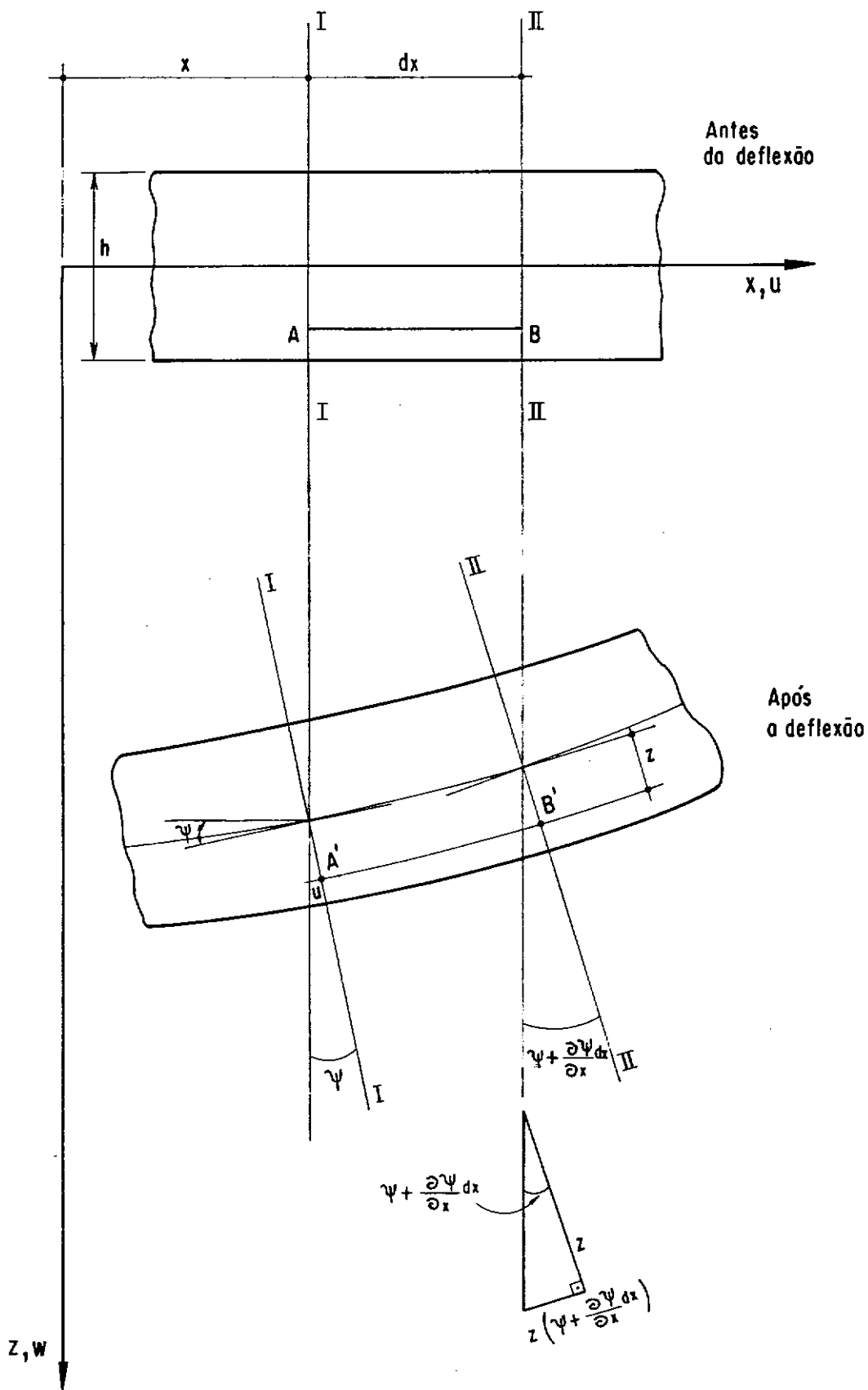


Fig. II.5 - Secções da parede por um plano  $y = \text{cte.}$



$$\psi = \operatorname{tg} \psi = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11.8)$$

De (11.7) e (11.8)

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11.9)$$

Analogamente, considerando a secção da parede por um plano paralelo ao plano  $yz$ .

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11.10)$$

Da Figura (11.5) tem-se:

$$u = z\psi \quad (11.11)$$

De (11.8) e (11.11)

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11.12)$$

Analogamente,

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (11.13)$$

De (11.6), (11.12) e (11.13)

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11.14)$$

De (11.3), (11.9) e (11.10)

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (11.15)$$

De (11.4), (11.9) e (11.10)

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (11.16)$$

De (11.5) e (11.14)

$$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{1 + \nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (11.17)$$

De (11.15), (11.16) e (11.17) conclui-se que as tensões normais e cisalhantes são lineares em  $z$  (Figura 11.6).

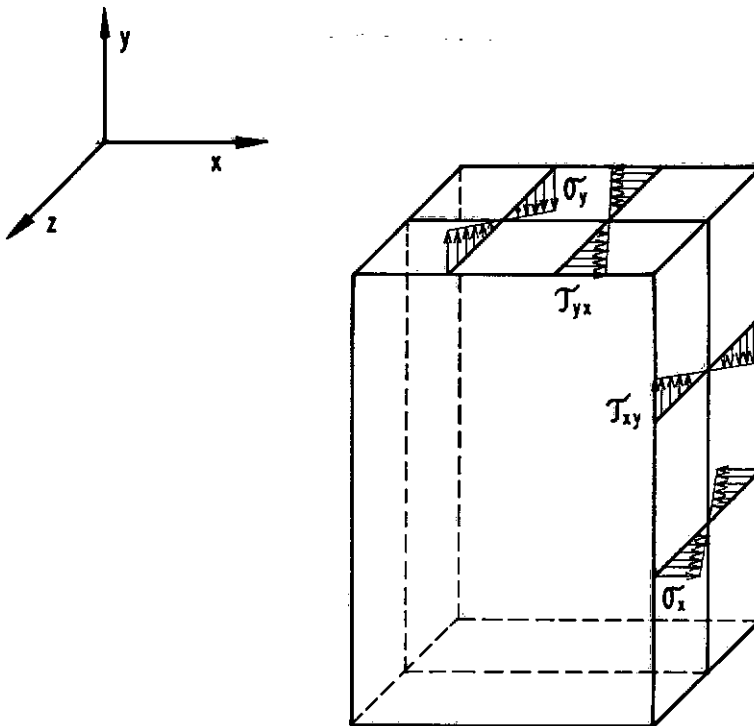


Figura 11.6

### 11.2.2 - Esforços Internos Expressos em Função da Deflexão $w$

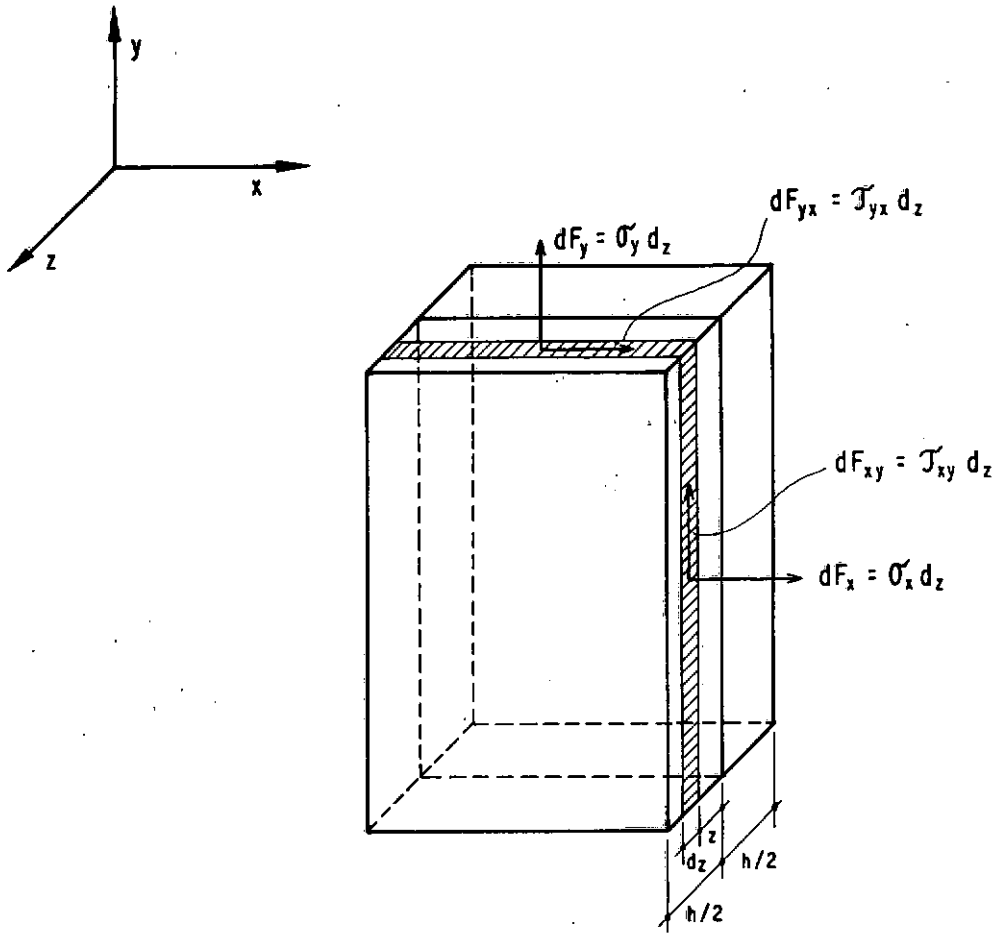


Figura 11.7

$$dF_x = \sigma_x dz$$

(Figura 11.7)

$$dM_x = \sigma_x z dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

(11.18)

De (11.15) e (11.18)

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \, dz$$

$$M_x = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Definindo  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  a rigidez à flexão da parede, tem-se:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (11.19)$$

$$dF_y = \sigma_y \, dz \quad (\text{Figura 11.7})$$

Analogamente,

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (11.20)$$

$$dF_{xy} = \tau_{xy} \, dz \quad (\text{Figura 11.7})$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \, z \, dz \quad (11.21)$$

De (11.17) e (11.21)

$$M_{yx} = -M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11.22)$$

### 11.2.3 - Equações de Equilíbrio

Somatório das forças na direção  $z$  (Figura 11.4.b),

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx + q_1 dx dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_1 = 0 \quad (11.23)$$

Momento das forças que agem no elemento em relação ao eixo  $x$  (Figura 11.4.b)

$$-M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy + M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx + Q_y dx \frac{dy}{2} +$$

$$+ \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx \frac{dy}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (11.24)$$

Momento das forças que agem no elemento em relação ao eixo  $y$  (Figura 11.4.b)

$$-M_x dy + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - Q_x dy \frac{dx}{2} -$$

$$- \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (11.25)$$

De (11.24)

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (11.26)$$

De (11.25)

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (11.27)$$

Substituindo (11.26) e (11.27) em (11.23)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q_1 \quad (11.28)$$

Substituindo (11.19), (11.20) e (11.22) em (11.28)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_1}{D} \quad (11.29.a)$$

Seja o operador  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Temos que:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = \nabla^2 (\nabla^2) = \nabla^4$$

$$\nabla^4 w = \frac{q_1}{D} \quad (11.29)$$

(11.29) é a equação diferencial da flexão da parede, à derivadas parciais, de 4.<sup>a</sup> ordem, linear, não homogênea, a coeficientes constantes.

### 11.3 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PAREDE, EM COORDENADAS CARTESIANAS, LEVANDO-SE EM CONTA CARGAS AXIAIS

A dedução da equação diferencial da parede na qual atuam somente cargas transversais, discutida anteriormente, baseia-se na hipótese de que não existem forças no plano, isto é, agindo na superfície média. Além disso, as deflexões são tão pequenas que algum alongamento do plano médio seria desprezível. Assim, este plano foi considerado como o plano neutro da parede.

Ocasionalmente, todavia, forças no plano são aplicadas diretamente nos bordos ou aparecem devido à variação de temperatura e, além disso, podem ocorrer também, quando os deslocamentos da parede, paralelos à sua superfície média, são impedidos por apoios.

Se, em adição ao carregamento lateral, houver forças agindo no plano médio da parede (Figura 11.8), alongamento deste plano é produzido e as correspondentes tensões seriam consideradas. Podem-se distinguir dois casos possíveis:

- (1) Estas tensões são pequenas em comparação com a

tensão de flambagem crítica e pode-se desprezar seu efeito na flexão da parede e supor que a tensão total seja obtida com suficiente precisão, pela superposição das tensões devidas ao alongamento do plano médio e as tensões produzidas pelo carregamento lateral;

- (2) As tensões no plano médio da parede não são pequenas e seu efeito na flexão da parede deve ser considerado.

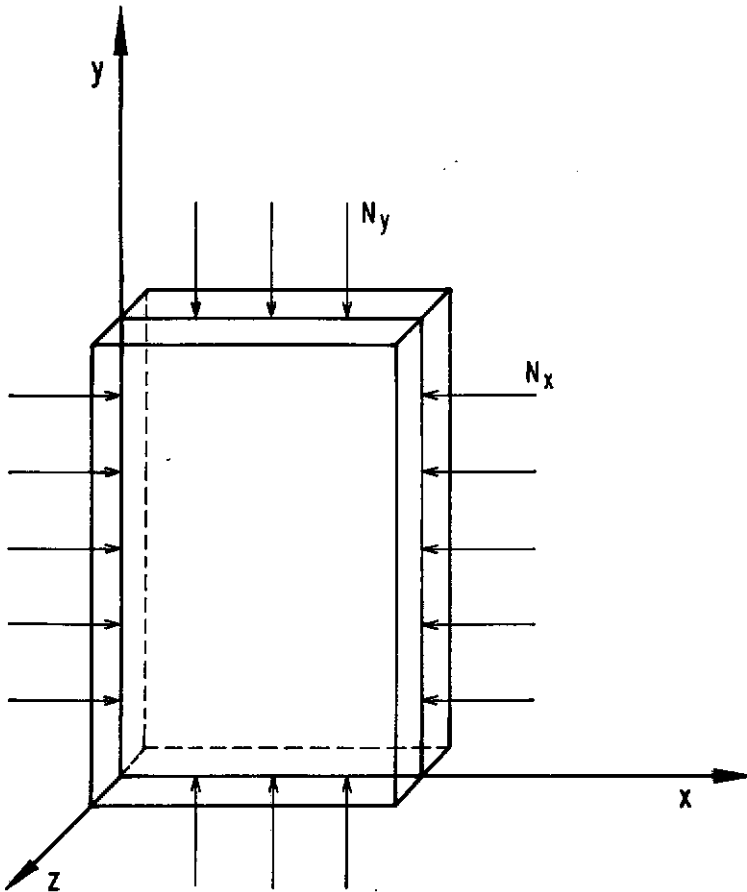


Figura 11.8

Derivando a correspondente equação diferencial da superfície defletida para este último caso, considera-se o equilí



brío de um elemento infinitesimal cortado da parede por dois pares de planos respectivamente paralelos aos planos  $xz$  e  $yz$  (Figura 11.9),

Em adição às cargas transversais consideradas anteriormente, ter-se-ão, agora, cargas agindo no plano médio da parede.

Considerando a soma das componentes em  $x$  de  $N_x dy$  (Figura 11.9).

$$-N_x \cos \beta \, dy + \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \cos \beta_1 \, dy$$

$$\beta_1 = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx$$

$$\cos \beta_1 = \cos \left( \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \right)$$

$$\cos \beta_1 = \cos \beta \cos \frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \sin \beta \sin \frac{\partial \beta}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} dx \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \cos \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \rightarrow 1$$

$$\cos \beta_1 = \cos \beta$$

Logo

$$-N_x \cos \beta \, dy + N_x \cos \beta \, dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cos \beta \, dx \, dy = \frac{\partial N_x}{\partial x} \cos \beta \, dx \, dy$$



Analogamente, a soma das componentes em x de

$N_{yx} dx$  é:

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cos \beta dx dy$$

Fazendo o somatório das forças na direção x, tem-se:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \cos \beta dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cos \beta dx dy = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (11.30)$$

Analogamente, o somatório das forças na direção y

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (11.31)$$

Considerando a soma das componentes em z de  $N_x dy$

(Figura 11.9)

$$- N_x \sin \beta dy + \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \sin \beta_1 dy$$

$$\beta \rightarrow 0 \quad e \quad \sin \beta \approx \beta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\sin \beta_1 \approx \beta_1 \approx \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx) dy \\
 & N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (11.32-a)
 \end{aligned}$$

Analogamente, considerando-se a soma das componentes em z de  $N_y dx$  tem-se:

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (11.32-b)$$

Considerando a soma das componentes em z de  $N_{xy} dy$  (Figura II.10)

$$-N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} dy + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx) (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx) dy$$

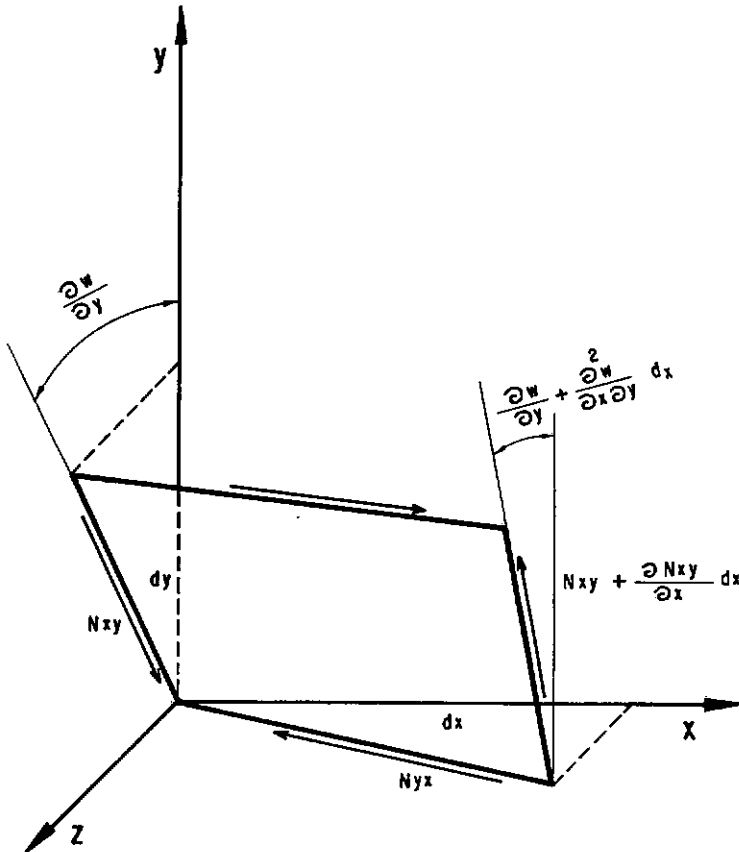


Fig. II.10

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (11.32-c)$$

Analogamente, considerando a soma das componentes em z de  $N_{yx}$  dx, tem-se:

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (11.32-d)$$

A projeção em z de todas as forças atuantes no plano médio, é dada por:

$$\begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \\ + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

Simplificando e levando-se em conta as Eqs. (11.30) e (11.31) tem-se:

$$(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) dx dy \quad (11.32)$$

Somando a expressão (11.32) com a carga transversal  $q_1 dx dy$  obtêm-se, ao invés da equação (11.29-a), a seguinte equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} (q_1 + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \quad (11.33)$$

(11.33) é a equação diferencial da superfície defletida da parede na qual atuam cargas transversais e axiais. Esta equação diferencial foi originalmente deduzida por Saint-Venant <sup>[1]</sup>, em 1883.

Fazendo-se  $q_1 = 0$  na Equação (11.33) tem-se a equação diferencial da superfície defletida da parede, na qual atuam somente cargas axiais.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (11.34)$$

#### 11.4 - O MÉTODO DE ENERGIA.

##### 11.4.1 - Introdução

O método de energia pode também ser usado no estudo da flambagem de paredes, especialmente nos casos em que uma solução rigorosa da Equação (11.34) é impossível de ser obtida ou quando se tem uma parede com reforços rígidos e se pretende apenas um valor aproximado da carga crítica.

Quando cargas externas são aplicadas à parede, ela se deforma, gerando tensões internas das quais resultam forças internas. Assim, a energia total de uma parede deformada é a soma da energia potencial das forças externas e internas.

A variação na energia potencial das forças externas é o negativo do trabalho destas forças. Se  $w_e$  for o trabalho to

tal executado pelas forças externas e  $V$  a energia potencial destas forças, tem-se:

$$V = -W_e \quad (11.35)$$

A capacidade das forças internas de executarem trabalho no estado deformado da parede, é chamada energia de deformação. Para calcular esta energia, é necessário somente computar o trabalho feito pelas forças internas, durante o processo de deformação. A energia de deformação, acumulada na parede, no estado de equilíbrio considerado é o negativo do trabalho das forças internas. Se  $W_i$  for o trabalho total executado pelas forças internas e  $U$  a energia de deformação, tem-se:

$$U = -W_i \quad (11.36)$$

Durante a deformação da parede, o trabalho das forças externas  $W_e$  é resistido pelo trabalho das forças internas  $W_i$  ou seja, na configuração de equilíbrio, tem-se:

$$W_e + W_i = 0 \quad (11.37)$$

O potencial total da parede é dado por:

$$\pi = U + V \quad (11.38)$$

Em paredes nas quais atuam cargas no seu plano médio, o equilíbrio estável é caracterizado pela ausência de deslocamentos laterais ou seja,  $w = 0$ ,  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$ . À medida que

estas cargas crescem simultaneamente, com as deformações no plano da parede aparecem eventualmente, deslocamentos laterais. Nesta condição, o equilíbrio originalmente estável, se torna instável e ocorre flambagem. A carga que produz este estado de deformação é a carga crítica. Sua determinação é de grande importância porque, quando aparece o deslocamento lateral, se se aumenta o valor da carga, grandes deflexões laterais aparecem, tendo como conseqüência a ruína da parede. É situação perigosa, devendo ser afastada.

A parede, ao passar de uma configuração de equilíbrio estável para o instável, passa pelo estado neutro o qual se caracteriza pela conservação da energia. "No estado de equilíbrio neutro, a parede originalmente plana, passa a uma configuração curva, sem ganhar ou perder energia" ou seja,

$$\Delta W_i + \Delta W_e = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta \pi = 0 \quad (11.39)$$

Enunciando:

#### • Princípio da Energia Potencial Estacionária

"De todos os possíveis deslocamentos que satisfazem as condições de contorno de um sistema estrutural, aqueles que correspondem à configuração de equilíbrio, tornam a energia potencial estacionária".



## • Princípio da Energia Potencial Mínima

"De todos os deslocamentos que satisfazem às condições de contorno de um sistema estrutural, aqueles que correspondem à configuração de equilíbrio estável, fazem a energia potencial total assumir um mínimo relativo".

Conclui-se pois, que o método de energia para o estudo da flambagem de paredes consiste na dedução da expressão do potencial total da parede e da sua minimização, sendo assim possível a obtenção do valor da carga crítica.

### 11.4.2 - O Potencial Total $\pi$ , da Parede

#### 11.4.2.1 - Energia de Deformação da Parede Fletida sob a Ação da Carga Lateral

Seja o elemento da parede, mostrado na Figura (11.4). Desprezando a energia de deformação devido aos esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ , a energia de deformação do elemento é igual ao trabalho executado no elemento, pelos momentos fletores  $M_x dy$  e  $M_y dx$  e pelos momentos torçores  $M_{xy} dy$  e  $M_{yx} dx$ .

Não havendo a contribuição dos esforços cortantes na curvatura da superfície defletida, as faces do elemento permanecem planas e a energia de deformação do elemento é igual ao trabalho realizado pelos momentos fletores  $M_x dy$ ,  $M_y dx$  e pelos momentos torçores  $M_{xy} dy$  e  $M_{yx} dx$ .

O trabalho executado pelo momento  $M_x dy$  é igual à metade do produto do momento pelo ângulo entre as faces do elemento, após a flexão. Assim  $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  representa, aproximadamente, a curvatura da parede no plano  $xz$ . O ângulo que corresponde ao momento  $M_x dy$  é  $-(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) dx$  e o trabalho feito por este momento é:

$$- \frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \quad (11.40-a)$$

Analogamente, para  $M_y dx$

$$- \frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad (11.40-b)$$

O trabalho do momento torçor  $M_{xy} dy$  é dado pela metade do produto do momento pelo ângulo de torção que é igual a  $-(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) dx$  (Figura 11.10).

Logo, tem-se:

$$- \frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy \quad (11.40-c)$$

A mesma expressão representa o trabalho executado pelo momento torçor  $M_{yx} dx$

$$- \frac{1}{2} M_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy \quad (11.40-d)$$

A energia de deformação total de um elemento de parede é dada pela soma das expressões (11.40-a-b-c-d) ou seja:

$$d U_1 = -\frac{1}{2} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (11.40-e)$$

Substituindo os valores de  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  em função da deflexão  $w$ , dados respectivamente pelas equações (11.19), (11.20) e (11.22) tem-se:

$$U_1 = \frac{1}{D} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (11-40)$$

#### 11.4.2.2 - Energia de Deformação da Parede sob a Ação de Cargas Contidas no seu Plano Médio

Neste caso, tem-se um problema bi-dimensional da teoria da elasticidade. As componentes de deformação no plano médio da parede são dadas por:

$$\epsilon_x = \frac{1}{h \cdot E} (N_x - \nu N_y) \quad (11.41-a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{h \cdot E} (N_y - \nu N_x) \quad (11.41-b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{h \cdot G}$$

onde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11.41-c)$$

A energia de deformação do plano médio da parede,  $U_2$ , por forças nele aplicadas é dada por:

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (11.41-d)$$

Substituindo (11.41-a, b, c) em (11.41-d)

$$U_2 = \frac{1}{2hE} \iint \left[ N_x^2 + N_y^2 - 2\nu N_x N_y + 2(1+\nu) N_{xy}^2 \right] dx dy \quad (11.41)$$

No caso da flexão da parede submetida à ação simultânea de cargas laterais e cargas contidas no seu plano médio, supõe-se que as cargas contidas no seu plano médio sejam aplicadas primeiro e a energia correspondente seja dada pela Eq. (11.41).

Aplicando agora a carga lateral com conseqüente flexão da parede. Seja o elemento linear AB, da parede (Fig. II.11), na direção  $x$ .

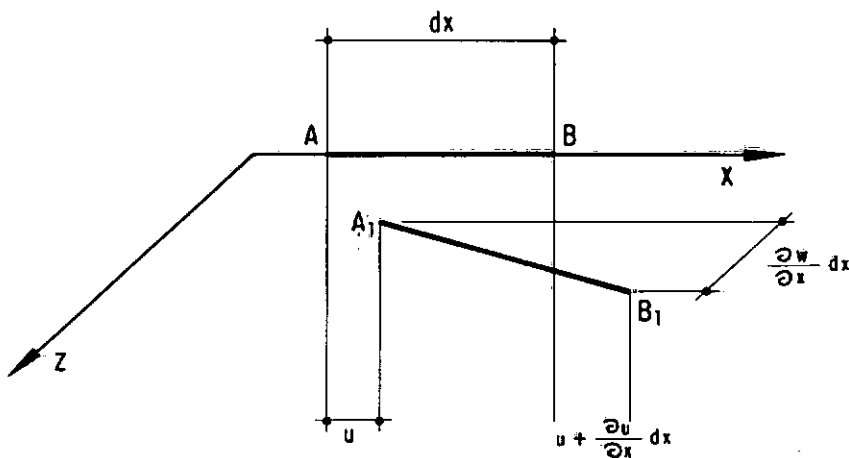


Fig. II.11

A deformação deste elemento na direção  $x$ ,  $\epsilon'_x$ , será devida aos deslocamentos  $u$  e  $w$ .

A parcela de deformação devida aos deslocamentos  $u$  é dada por  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ . Calculando a parcela de deformação devida ao deslocamento  $w$ . Comparando os comprimentos  $\ell$  e  $\ell_1$ , respectivamente, dos elementos  $AB$  e  $A_1B_1$ , tem-se:

$$\ell = dx$$

$$\ell_1 = \left[ (dx)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2} = dx \left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \dots$$

Considerando apenas os dois primeiros termos, tem-se:

$$\ell_1 - \ell = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

A deformação total unitária, na direção  $x$ , de um elemento do plano médio da parede, é dada por:

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (11.42-a)$$

Analogamente, a deformação na direção  $y$  é:

$$\epsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (11.42-b)$$

A deformação cisalhante devida ao deslocamento  $u$  e  $v$  é dada por  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ . Calculando agora a parcela de deformação devida ao deslocamento  $w$  (Figura II.12).

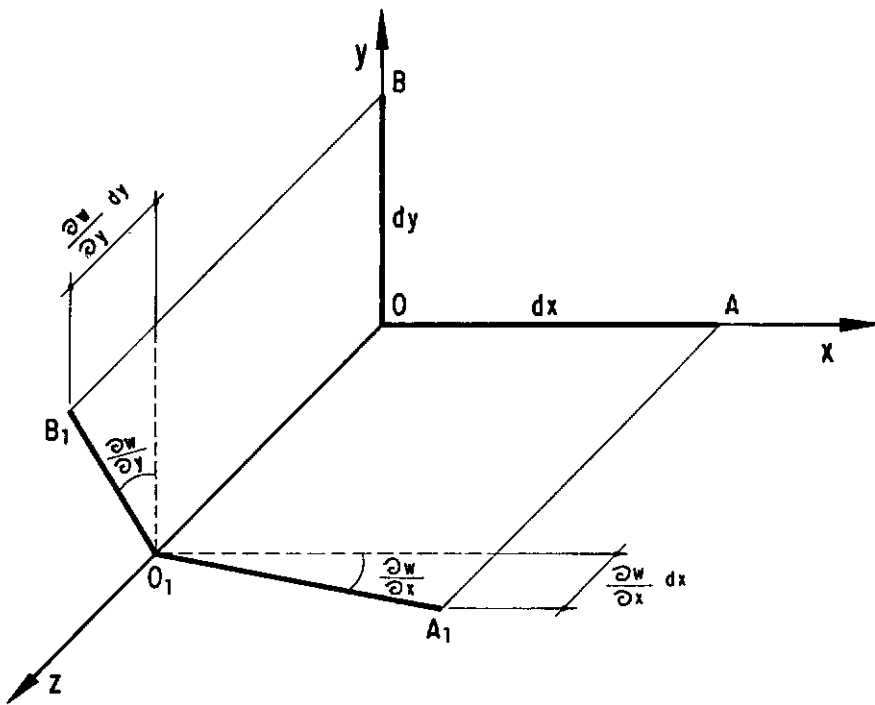


Fig. II.12

Sejam dois elementos infinitesimais lineares  $OA$  e  $OB$  respectivamente, nas direções  $x$  e  $y$ . Por causa do deslocamento  $w$ , estes elementos tomam respectivamente, as posições  $O_1A_1$  e  $O_1B_1$ . A diferença entre os ângulos  $A_1O_1B_1$  e  $\frac{\pi}{2}$  é a deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$  devida ao deslocamento  $w$ .

Para determinar esta diferença considera-se os cosenos diretores  $\ell_1, m_1, n_1$  e  $\ell_2, m_2, n_2$  respectivamente,

dos elementos  $0_1A_1$  e  $0_1B_1$ . Tem-se:

$$l_1 = \frac{\left[ dx^2 - \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2}}{dx} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$m_1 = 0$$

$$n_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$l_2 = 0$$

$$m_2 = \frac{\left[ dy^2 - \frac{\partial w}{\partial y} dy \right]^2^{1/2}}{dy} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$n_2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle A_1 0_1 B_1 = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \angle A_1 0_1 B_1 \right) = \cos \angle A_1 0_1 B_1$$

$$= l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

A deformação cisalhante total é:

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (11.42-c)$$

Supondo que as deformações  $\epsilon'_x$ ,  $\epsilon'_y$  e  $\epsilon'_{xy}$  no plano médio, devidas à flexão, sejam pequenas em comparação com  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , e  $\gamma_{xy}$  e supondo também que  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy}$  se mantenham constantes durante a flexão, a energia de deformação devida ao alongamento adicional do plano médio, é:

$$U_3 = \iint (N_x \epsilon'_x + N_y \epsilon'_y + N_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy \quad (11.42-d)$$

Substituindo (11.42-a, b, c) em (11.42-d) tem-se:

$$U_3 = \iint \left[ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (11.42)$$

Somando as Equações (11.40) e (11.42) tem-se a energia de deformação total (U), de uma parede, durante a flexão

$$U = U_1 + U_3$$

$$U = \iint \left[ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (11.43)$$



A primeira integral, no lado direito da Eq. (11.43) representa o trabalho executado, durante a flexão pelas forças agindo no plano médio da parede. As duas últimas integrais representam o trabalho executado pela carga lateral. Chamando  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, o trabalho executado pelos dois sistemas de forças referidos acima, obtém-se:

$$T_1 = \iint \left[ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (11.44)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy +$$

$$+ \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (11.45)$$

Se se despreza o alongamento do plano médio, conclui-se das expressões (11.42-a, b, c) respectivamente:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = - \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (11.46)$$

Substituindo as expressões (11.46) em (11.44) tem-se que o trabalho  $T_1$  das forças agindo no plano médio da parede é:

$$T_1 = - \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (11.47)$$

sendo que:

$$T_1 + T_2 = \frac{J}{2} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

(11.48)

## CAPÍTULO III

### FLAMBAGEM DO ELEMENTO PAREDE

#### III.1 - EQUAÇÕES AUXILIARES

De posse da equação diferencial (II.34) e do potencial total da parede (II.43), deduzidos no Capítulo anterior, far-se-á, agora, o estudo da flambagem da parede retangular sob várias condições de carregamento e de apoios.

A pesquisa dos casos de paredes retangulares com forças axiais, já estudados, nos permitirá obter os valores do coeficiente de vinculação e do coeficiente de flambagem da parede, valores estes, úteis no estudo que se fará da associação destas.

A solução da Equação (II.34) deve satisfazer as condições de contorno da parede retangular de dimensões a e b respectivamente. Seja esta parede simplesmente apoiada nos bordos a onde atua uma carga de compressão uniformemente distribuída  $N_y$  (Figura III.1). As condições de contorno dos bordos b, não carregados, serão consideradas posteriormente.

A Equação (II.34) se reduz a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (III.1)$$

Nos bordos a as condições de contorno são:

$$(w = 0)_{y=0} \quad (w = 0)_{y=b} \quad (M_y = 0)_{y=0} \quad (M_y = 0)_{y=b} \quad (III.2)$$

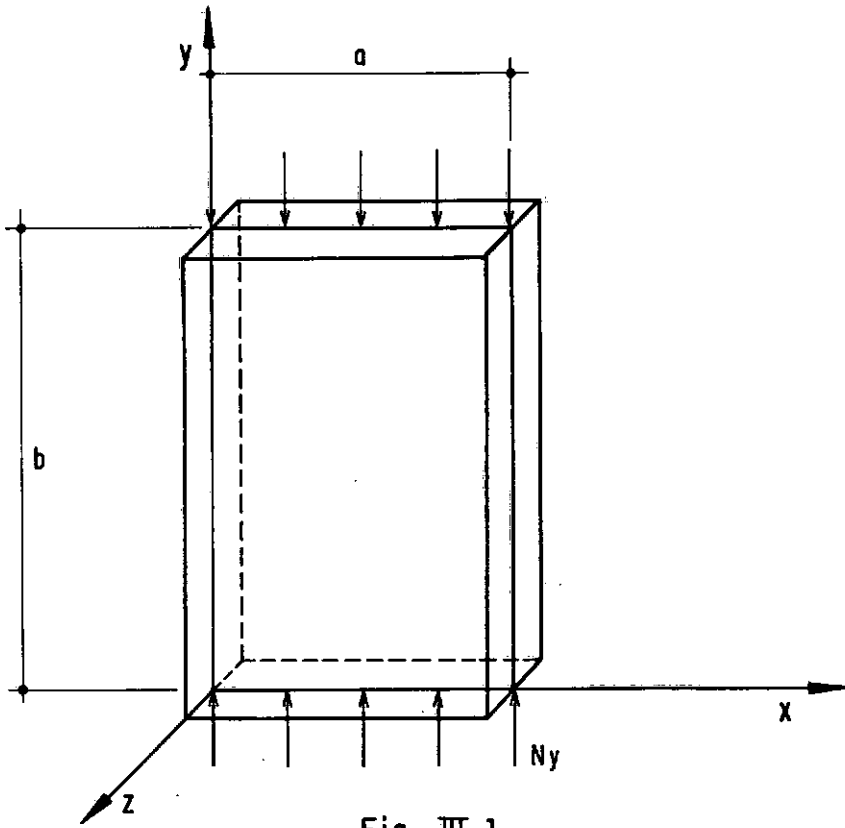


Fig. III.1

Supondo que, na configuração de flambagem, os bordos  $y = 0$ ,  $y = b$  permaneçam retos,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  deve ser zero e as condições de contorno (III.2) se resumem a

$$(w = 0)_{y=0} \quad (w = 0)_{y=b} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\right)_{y=0} \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\right)_{y=b} \quad (III.3)$$

A equação diferencial (III.1) e as condições de contorno (III.3) são verificadas pela expressão:

$$w = X \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (III.4)$$

onde  $X$  é uma função de  $x$ , ainda a ser determinada e  $n$  o número de meias ondas de flambagem na direção do carregamento. Substituindo (III.4) e as suas derivadas na Equação (III.1) tem-se a equação diferencial ordinária de 4.<sup>a</sup> ordem.

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{N_y}{D} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] X = 0$$

Chamando  $N_y = \sigma_c h$  onde  $\sigma_c$  é a tensão longitudinal crítica incôgnita e  $h$  é a espessura da parede, tem-se:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\sigma_c h}{D} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] X = 0 \quad (\text{III.5})$$

Introduzindo a notação:

$$\mu^2 = \frac{\sigma_c h}{D} \left( \frac{b}{n\pi} \right)^2 \quad (\text{III.6})$$

Substituindo (III.6) em (III.5) tem-se:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \left[ 1 - \mu^2 \right] X = 0 \quad (\text{III.7})$$

A solução geral de (III.7) é dada por:

$$w = \sin \frac{n\pi y}{b} (C_1 \cosh r_1 x + C_2 \sinh r_1 x + C_3 \cos r_2 x + C_4 \sin r_2 x) \quad (\text{III.8})$$

onde,

$$r_1 = \frac{n\pi}{b} \sqrt{\mu + 1} \quad ; \quad r_2 = \frac{n\pi}{b} \sqrt{\mu - 1} \quad (III.9)$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  da Equação (III.8) são determinadas pelas condições de contorno dos bordos  $\underline{b}$ .

### III.1.1 - Condições de Apoio dos Bordos Descarregados

#### III.1.1.1 - Parede Elásticamente Vinculada nos Bordos $\underline{b}$

Adotando a origem do sistema de eixos no ponto médio do bordo inferior e supondo apoios iguais nos bordos descarregados, a deflexão  $w$  se torna uma função simétrica em  $x$  e os termos  $C_2 \sinh r_1 x$  e  $C_4 \sinh r_2 x$  da Equação (III.8) desaparecem, (Figura III.2). Tem-se, portanto,

$$w = \sin \frac{n\pi y}{b} (C_1 \cosh r_1 x + C_3 \cos r_2 x) \quad (III.10)$$

Determinando as constantes  $C_1$  e  $C_3$ . Tem-se:

$$(w = 0)_{x = \pm \frac{a}{2}} \quad (III.11)$$

A condição expressa por (III.11) significa que os bordos  $x = \pm \frac{a}{2}$  permanecem retos na configuração de flambagem.

$$(\psi = \bar{\psi})_{x = \pm \frac{a}{2}} \quad (III.12)$$

(III.12) é a condição de continuidade, indicando que o ângulo de

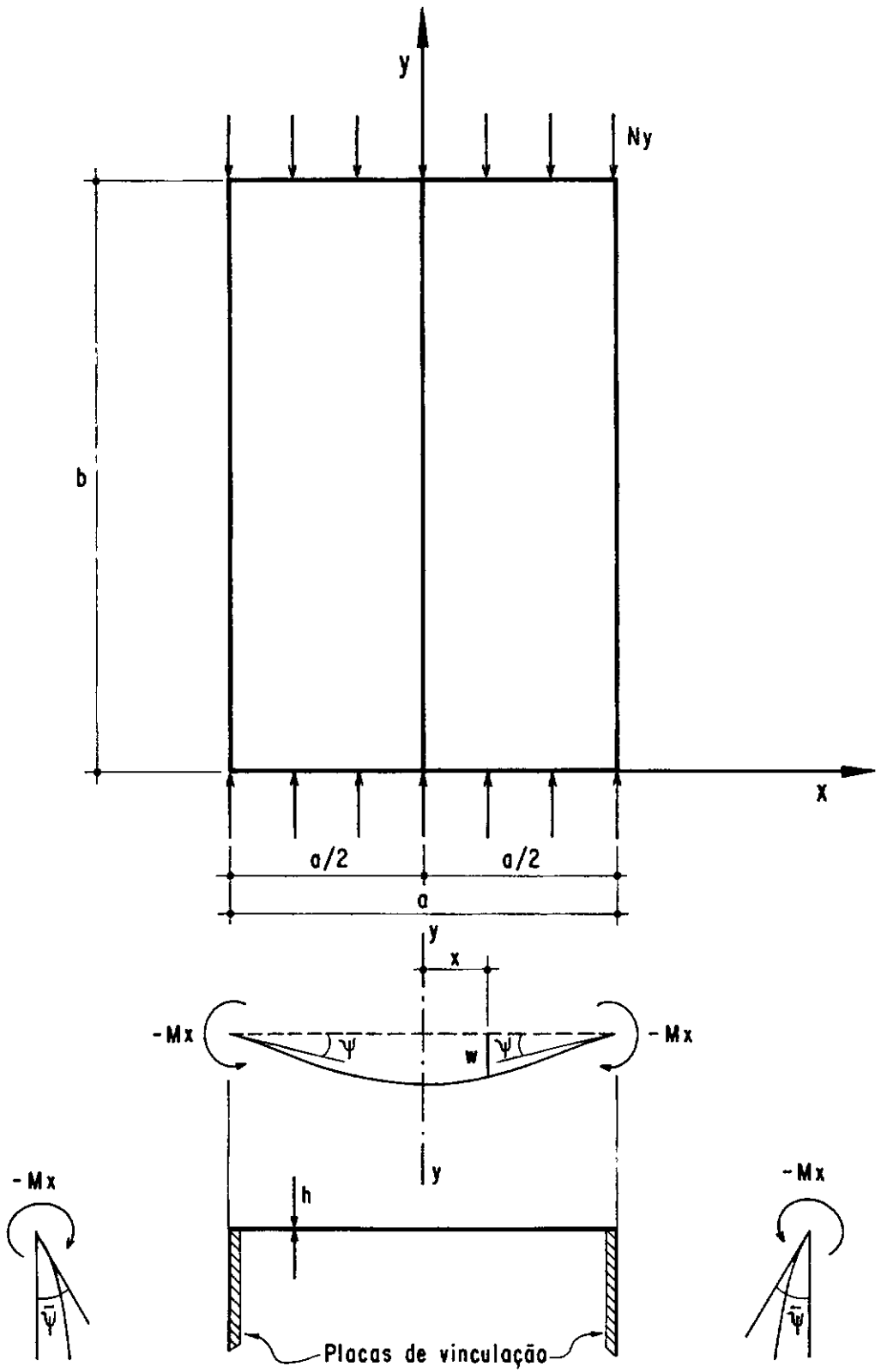


Fig. III.2

rotação  $\psi$  da parede, na configuração de flambagem, é igual ao ângulo de rotação  $\bar{\psi}$  da placa de vinculação adjacente, as quais são rigidamente ligadas.

Expressando  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  em função de  $w$ , a fim de que seja possível relacionar as Equações (III.10) e (III.12).

O momento fletor  $M_x$ , por unidade de comprimento, que atua ao longo dos bordos  $x = \pm \frac{a}{2}$ , na configuração de flambagem, é proporcional ao ângulo  $\bar{\psi}$ , isto é:

$$M_x = -\bar{\xi} \bar{\psi} \quad (\text{III.13})$$

onde  $\bar{\xi}$  é o fator de proporcionalidade, dependendo das dimensões das placas de vinculação

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} \quad (\text{III.14})$$

Nos bordos  $\underline{b}$   $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$  e a Equação (III.14) se reduz a:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} \quad (\text{III.15})$$

Substituindo (III.15) em (III.13) tem-se:

$$\bar{\psi} = \frac{D}{\bar{\xi}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} \quad (\text{III.16})$$



$$\psi = \pm \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} \quad (\text{III.17})$$

Substituindo (III.16) e (III.17) em (III.12)

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \pm \frac{D}{\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0$$

ou

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \pm \frac{a}{2} \frac{2D}{a\xi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0$$

Definindo  $\xi = \frac{2D}{a\xi}$  o coeficiente de vinculação da parede, tem-se:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \pm \frac{a}{2} \xi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0 \quad (\text{III.18})$$

$\xi$  é um número adimensional, considerado constante ao longo dos bordos  $\underline{b}$ . É função das dimensões da parede e das placas de vinculação. Teoricamente  $\xi$  varia de 0 a  $\infty$ . Se  $\xi = 0$  a parede é completamente fixa nos bordos  $\underline{b}$  e se  $\xi = \infty$ , ela é livre para rotação em torno destes bordos.

Substituindo a solução (III.10) nas condições (III.17) e (III.18) tem-se:

$$C_1 \cosh r_1 \frac{a}{2} + C_3 \cos r_2 \frac{a}{2} = 0$$

$$C_1 r_1 \sinh r_1 \frac{a}{2} - C_3 r_2 \sin r_2 \frac{a}{2} + \xi \frac{a}{2} (C_1 r_1^2 \cosh r_1 \frac{a}{2} - C_3 r_2^2 \cos r_2 \frac{a}{2}) = 0 \quad (III.19)$$

Os valores não nulos de  $C_1$  e  $C_3$  são obtidos do sistema formado pelas equações lineares homogêneas (III.19) fazendo-se o seu determinante nulo, ou seja:

$$r_1 \operatorname{tgh} r_1 \frac{a}{2} + r_2 \operatorname{tg} r_2 \frac{a}{2} + \xi \frac{a}{2} (r_1^2 + r_2^2) = 0 \quad (III.20)$$

Chamando  $\phi = \frac{b}{a}$  e substituindo nas Eqs. (III.6) e (III.9) tem-se:

$$\mu^2 = \frac{\sigma_c \cdot h \cdot a^2}{D} \left( \frac{\phi}{n\pi} \right)^2 \quad (III.21)$$

$$r_1 \frac{a}{2} = \frac{n\pi}{2\phi} \sqrt{\mu + 1} \quad ; \quad r_2 \frac{a}{2} = \frac{n\pi}{2\phi} \sqrt{\mu - 1} \quad (III.22)$$

Substituindo (III.9) e (III.22) em (III.20) tem-se:

$$\sqrt{\mu + 1} \operatorname{tgh} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu + 1} \frac{n}{\phi} \right) + \sqrt{\mu - 1} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu - 1} \frac{n}{\phi} \right) + \pi \xi \mu \frac{n}{\phi} = 0 \quad (III.23)$$

A equação transcendente (III.23) define a relação entre o parâmetro  $\mu$  e a razão  $\frac{n}{\phi}$ . Se se calcular o valor de  $\mu$  nesta equação para um dado valor de  $\frac{n}{\phi}$ , a determinação de  $\sigma_c$  fica relativamente simples, pela Equação (III.21).

### III.1.1.2 - Parede Simplesmente Apoiada nos Bordos b

Fazendo-se na Equação (III.23)  $\xi = \infty$ , obtém-se a condição de estabilidade para uma parede simplesmente apoiada.

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu - 1} \frac{n}{\phi} \right) = -\infty$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\mu - 1} \frac{n}{\phi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\mu^2 = \left[ \left( \frac{\phi}{n} \right)^2 + 1 \right]^2 \quad (\text{III.24})$$

Substituindo  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  e (III.24) na Equação (III.21), tem-se:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \left( \frac{\phi}{n} + \frac{n}{\phi} \right)^2 \quad (\text{III.25})$$

Na Equação (III.25) a única incôgnita é  $n$ . Observa-se que o seu valor é função da razão  $\phi$ . Para paredes suficientemente curtas, ou seja, para pequenos valores de  $\phi$ , a flambagem ocorre em uma meia onda. Acima de certo valor de  $\phi$ , duas meias ondas serão formadas. A razão limite é a razão na qual há a transição de um estado de equilíbrio para outro, isto é, quando ambos os valores ( $n=1$ ,  $n=2$ ) são igualmente possíveis à mesma tensão de flambagem  $\sigma_c$ . Para obtê-la iguala-se os valores obtidos da Equação (III.25) quando se introduz  $n=1$  ou  $n=2$ .

Seguindo o mesmo raciocínio, é possível determinar o valor de  $\phi$  para flambagem em duas ou três meias ondas. De uma maneira geral, encontra-se o valor da razão limite  $\bar{\phi}$  na qual  $n$  ou  $n+1$  meias ondas podem ocorrer, da equação:

$$\frac{\bar{\phi}}{n} + \frac{n}{\bar{\phi}} = \frac{\bar{\phi}}{n+1} + \frac{n+1}{\bar{\phi}}$$

ou

$$\bar{\phi} = \sqrt{n(n+1)}$$

Para  $n = 1, 2, 3, \dots$   $\bar{\phi} = \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}$ , respectivamente. Isto será ilustrado no Exemplo (V.1).

No regime elástico, o número de meias ondas se torna independente do material. Reescrevendo-se a Equação (III.25)

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 K \quad (\text{III.26})$$

Tem-se  $K = \left(\frac{\phi}{n} + \frac{n}{\phi}\right)^2$ , o coeficiente de flambagem da parede, um coeficiente adimensional, indicando na Equação (III.26), a dependência de  $\sigma_c$  da razão  $\phi$  e do número de meias ondas  $n$ . Para cada  $\phi$  existe um valor  $n$  e consequentemente um valor de  $\sigma_c$ , mínimo. Este valor,  $\phi_0$ , que conduz à tensão  $\sigma_c$  mínima é obtido da condição:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = n \quad (\text{III.27})$$

Substituindo (III,27) em (III,26) tem-se:

$$M_{in} \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{3 (1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \quad (III.28)$$

Conclui-se da Equação (III.26) que, para paredes cujos bordos descarregados são simplesmente apoiados, o coeficiente de flambagem  $K$  assume o valor 4,

#### III.1.1.2.1 - Introdução dos Parâmetros p e q

A equação transcendente (III,23) já deduzida anteriormente é inconveniente para aplicações.

No caso de paredes simplesmente apoiadas tem-se uma equação algébrica (Eq, III.24) para  $\mu^2$  ou seja:

$$\mu^2 = 1 + 2 \left( \frac{\phi}{n} \right)^2 + \left( \frac{\phi}{n} \right)^4 \quad (III.29)$$

É possível exprimir a relação entre  $\mu^2$  e  $\frac{\phi}{n}$  dada pela Equação (III.29), aproximadamente por uma expressão algébrica similar. De acordo com Bleich [2], com um erro menor que 1%, os valores de  $\mu^2$  podem ser computados da expressão:

$$\mu^2 = 1 + p \left( \frac{\phi}{n} \right)^2 + q \left( \frac{\phi}{n} \right)^4 \quad (III.30)$$

onde  $p$  e  $q$  são fatores dependentes do coeficiente de vincula

ção  $\xi$ . Eles foram computados da condição de estabilidade (Equação III.23), para vários valores de  $\xi$ . A Figura (III.3) mostra o gráfico dos valores de  $p$  e  $q$  em função de  $\xi$ .

Substituindo (III.30) na Equação (III.21) e também  $D$  pelo seu valor e  $b = \phi a$ , a seguinte equação de  $\sigma_c$  válida para todos os valores possíveis da vinculação elástica, é obtida:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \left[ \left( \frac{n}{\phi} \right)^2 + p + q \left( \frac{\phi}{n} \right)^2 \right] \quad (\text{III.31})$$

onde

$$K = \left( \frac{n}{\phi} \right)^2 + p + q \left( \frac{\phi}{n} \right)^2 \quad (\text{III.32})$$

e a equação de  $\sigma_c$  assume a forma usual.

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 K \quad (\text{III.33})$$

Como no caso de paredes simplesmente apoiadas, a razão limite  $\bar{\phi}$ , para a qual  $n$  ou  $(n+1)$  meias ondas podem ocorrer, é obtida da condição:

$$\left( \frac{n}{\bar{\phi}} \right)^2 + p + q \left( \frac{\bar{\phi}}{n} \right)^2 = \left( \frac{n+1}{\bar{\phi}} \right)^2 + p + q \left( \frac{\bar{\phi}}{n+1} \right)^2$$

ou

$$\bar{\phi} = \sqrt[4]{\frac{1}{q}} \sqrt{n(n+1)} \quad (\text{III.34})$$

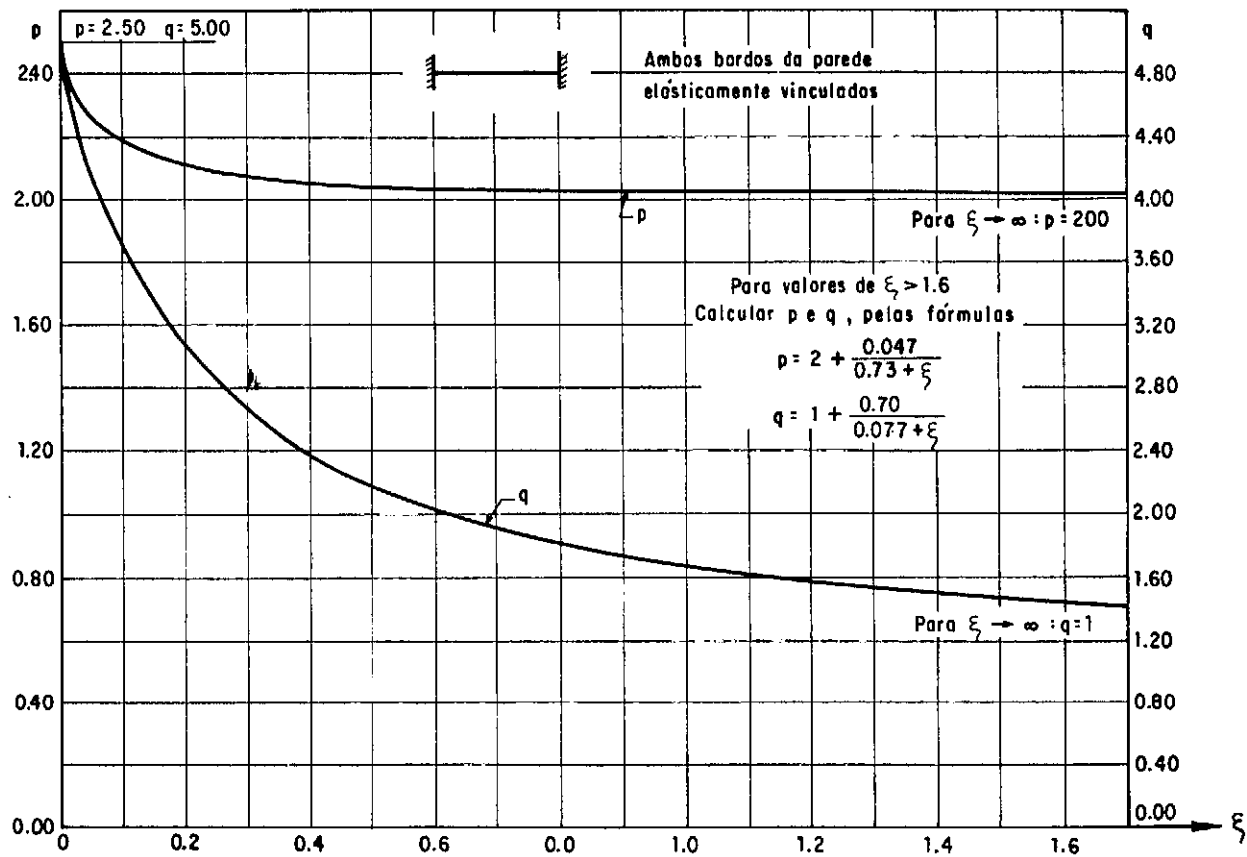


Fig. III.3

O valor de  $\phi$  para o qual  $\sigma_c$  alcança o valor mínimo é obtido da condição:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = n \sqrt[4]{\frac{1}{q}} \quad (III.35)$$

Substituindo-se (III.35) em (III.33) tem-se:

$$M_{in} \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 (p + 2 \sqrt{q}) \quad (III.36)$$

Na Equação (III.36) tem-se:

$$K = p + 2 \sqrt{q} \quad (III.37)$$

Bleich <sup>[2]</sup> foi o primeiro a utilizar os coeficientes  $p$  e  $q$  na análise da flambagem de paredes. A vantagem obtida na introdução dos âbacos de  $p$  e  $q$  é que um par de curvas é suficiente para determinar o coeficiente de flambagem  $K$ , para um dado valor do coeficiente de vinculação  $\xi$ . Caso contrário uma família de curvas exprimindo a relação entre  $\phi$  e  $K$  seria necessária para a determinação do coeficiente de flambagem (Veja Figura V.2).

Segundo Bleich <sup>[2]</sup>,  $q$  varia de 1 a 5. Para  $q=1$  (bordos descarregados simplesmente apoiados) tem-se  $\bar{\phi} = \sqrt{n(n+1)}$  e para  $q=5$  (bordos descarregados completamente fixados) tem-se  $\bar{\phi} = 0,668 \sqrt{n(n+1)}$ . Conclui-se que as meias ondas de flambagem se encurtam consideravelmente quando os bordos não carregados são engastados.



Até aqui, supôs-se apoios iguais em ambos os bordos descarregados. Se os apoios forem desiguais, o seguinte método aproximado tem sido sugerido por Lundquist e Stowell [23]: o método citado anteriormente, quando bordos descarregados são apoiados igualmente é aplicado, primeiramente, usando-se o coeficiente de vinculação  $\xi_1$  de um dos bordos descarregados, a fim de se obter o coeficiente de flambagem  $K_1$  e analogamente, para o outro bordo não carregado, a obtenção de  $\xi_2$  e o respectivo coeficiente  $K_2$ . O valor médio  $K = \frac{K_1 + K_2}{2}$  é uma aproximação do valor exato de  $K$  e deve ser introduzido na Equação (III.33) para se obter a tensão crítica da parede em estudo. Lundquist e Stowell fizeram uma comparação dos valores exato e aproximado de  $K$ , para um grande número de casos e mostraram que a diferença, na maioria dos casos, corresponde a uma porcentagem mínima do valor exato.

Para paredes cujos bordos descarregados são engastados, ou seja, fazendo-se  $\xi = 0$  na Equação (III.23) ou calculando os valores de  $p$  e  $q$  do ábaco da Figura I(III.3), tem-se  $p = 2,50$ ,  $q = 5,00$  e  $K = 6,972$ .

Para paredes apoiadas em um dos bordos descarregados e engastados no outro, adota-se o método sugerido por Lundquist e Stowell.

Para o bordo engastado -  $K_1 = 6,972$

Para o bordo apoiado -  $K_2 = 4,0$

$$K = \frac{K_1 + K_2}{2} \quad \text{ou} \quad K = 5,486$$

### III.1.1.3 - Parede Elasticamente Vinculada em um dos Bordos Descarregados b e Livre no Outro

Adotando, agora, o seguinte sistema de eixos: o eixo  $y$  coincidente com o bordo  $b$  apoiado e o eixo  $x$  coincidente com o bordo  $a$  inferior, da parede, conforme Figura (III.4). Não há simetria em relação aos eixos coordenados e a solução geral da equação diferencial (III.1) é dada pela Equação (III.8).

As condições de contorno dos bordos descarregados são:

$$(w = 0)_{x=0} \quad \text{e} \quad (\psi = \bar{\psi})_{x=0} \quad (\text{III.38})$$

$$(M_{x=0})_{x=a} \quad (V_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} = 0)_{x=a} \quad (\text{III.39})$$

onde  $V_x$  é o esforço cisalhante transversal efetivo, no bordo livre.

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_2 r_1 + c_4 r_2 - \xi \frac{a}{2} (c_1 r_1^2 - c_3 r_2^2) = 0$$

e obtém-se:

$$c_1 = -c_3$$

$$c_2 = -c_4 \frac{r_2}{r_1} - c_3 \xi \frac{a}{2} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \quad (\text{III.40})$$

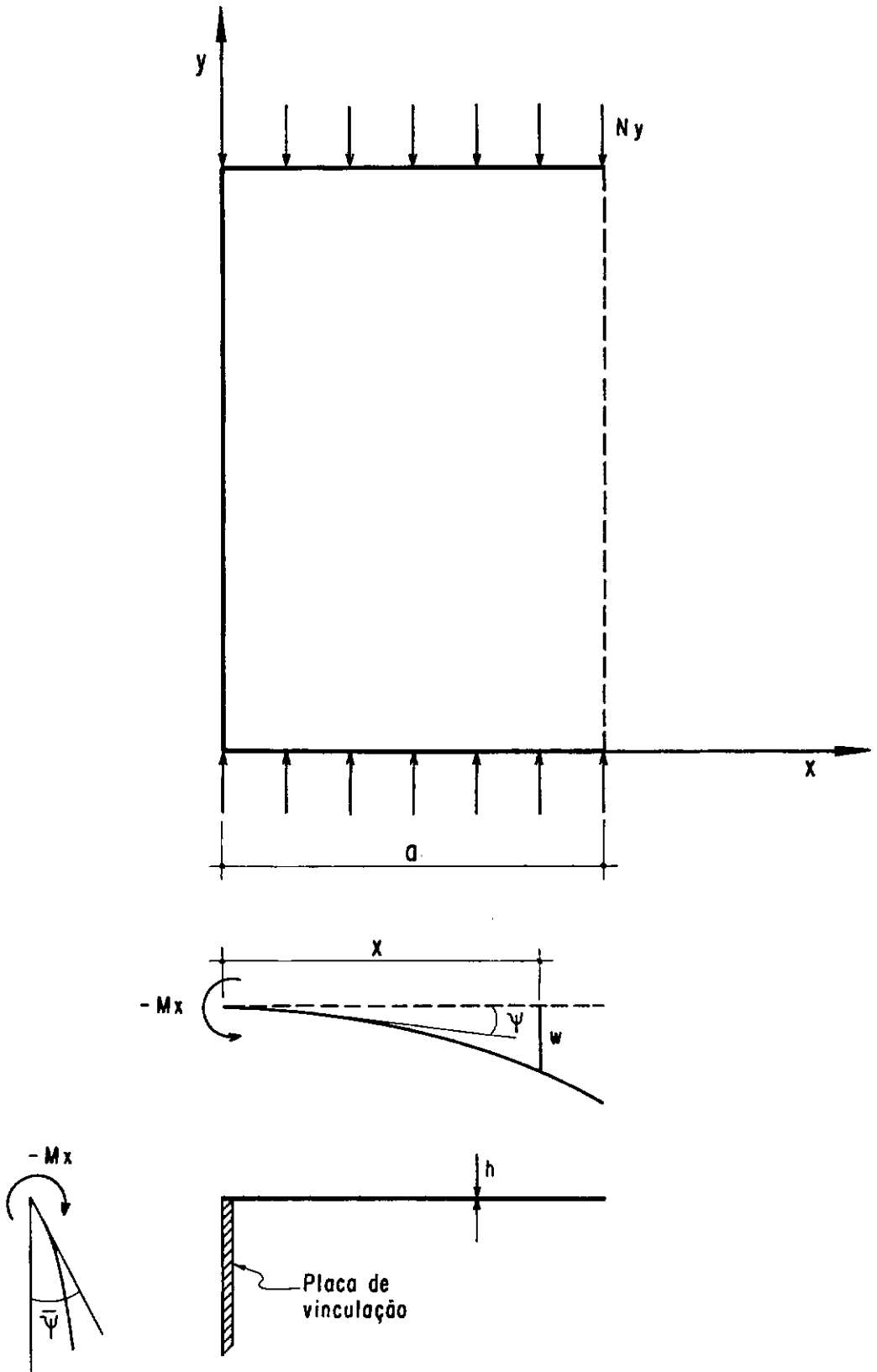


Fig. III.4

Substituindo (III.40) em (III.8):

$$w = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ c_3 \left( \cos r_2 x - \cosh r_1 x - \xi \frac{a}{2} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \sinh r_1 x \right) + \right. \\ \left. + c_4 \left( \operatorname{sen} r_2 x - \frac{r_2}{r_1} \sinh r_1 x \right) \right] \quad (\text{III.41})$$

Das condições (III.39) vem:

$$c_3 (t_1 \cos r_2 a + z_1 \cosh r_1 a + s_1 z_1 \sinh r_1 a) + c_4 (t_1 \operatorname{sen} r_2 a + z_1 \frac{r_2}{r_1} \sinh r_1 a) = 0 \\ c_3 (z_1 \frac{r_2}{r_1} \operatorname{sen} r_2 a - t_1 \sinh r_1 a - s_1 t_1 \cosh r_1 a) - c_4 (z_1 \frac{r_2}{r_1} \cos r_2 a + t_1 \frac{r_2}{r_1} \cosh r_1 a) = 0 \quad (\text{III.42})$$

onde

$$s_1 = \xi \frac{a}{2} \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \quad (\text{III.43})$$

$$t_1 = r_2^2 + v \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 = r_1^2 - (2 - v) \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (\text{III.44})$$

$$z_1 = r_1^2 - v \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 = r_2^2 + (2 - v) \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (\text{III.45})$$

$$r_1 a = \frac{n\pi}{\phi} \sqrt{\mu + 1} \quad (\text{III.46})$$

$$r_2 a = \frac{n\pi}{\phi} \sqrt{\mu - 1} \quad (\text{III.47})$$

Os valores não nulos de  $C_3$  e  $C_4$  são obtidos do sistema formado pelas Equações (III.42) fazendo-se o seu determinante nulo. Obtém-se, então:

$$\frac{2 t_1 z_1}{\cosh r_1 a \cos r_2 a} + t_1^2 + z_1^2 - \left( \frac{t_1^2 r_1^2 - z_1^2 r_2^2}{r_1 r_2} \right) \operatorname{tgh} r_1 a \operatorname{tg} r_2 a +$$

$$+ s_1 (z_1^2 \operatorname{tgh} r_1 a - t_1^2 \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg} r_2 a) = 0 \quad (\text{III.48})$$

A equação transcendente (III.48) exprime a relação entre  $\mu$  e  $\frac{\phi}{n}$  pois  $s_1, t_1, z_1, r_1, r_2$  são funções de  $\mu$ , como pode ser observado nas Equações (III.43, 44, 45, 46, 47).

Analogamente, como no item III.1.1.2.1 a tensão crítica  $\sigma_c$  é dada pela Equação (III.31). Os parâmetros  $p$  e  $q$  foram calculados da Equação (III.48) e os resultados obtidos são mostrados na Figura (III.5).

Também a razão  $\bar{\phi}$ , na qual  $n$  ou  $(n+1)$  meias ondas podem ocorrer é dada pela Equação (III.34) e o valor mínimo de  $\sigma_c$  é dado pela Equação (III.36).

Observando-se os ábacos das Figuras (III.3) e (III.5) conclui-se que os valores de  $p$  e  $q$  variam com as diferentes condições de apoio dos bordos descarregados.

Da Equação (III.35) conclui-se que, com a diminuição da vinculação elástica,  $\phi_0$  aumenta constantemente em consequên

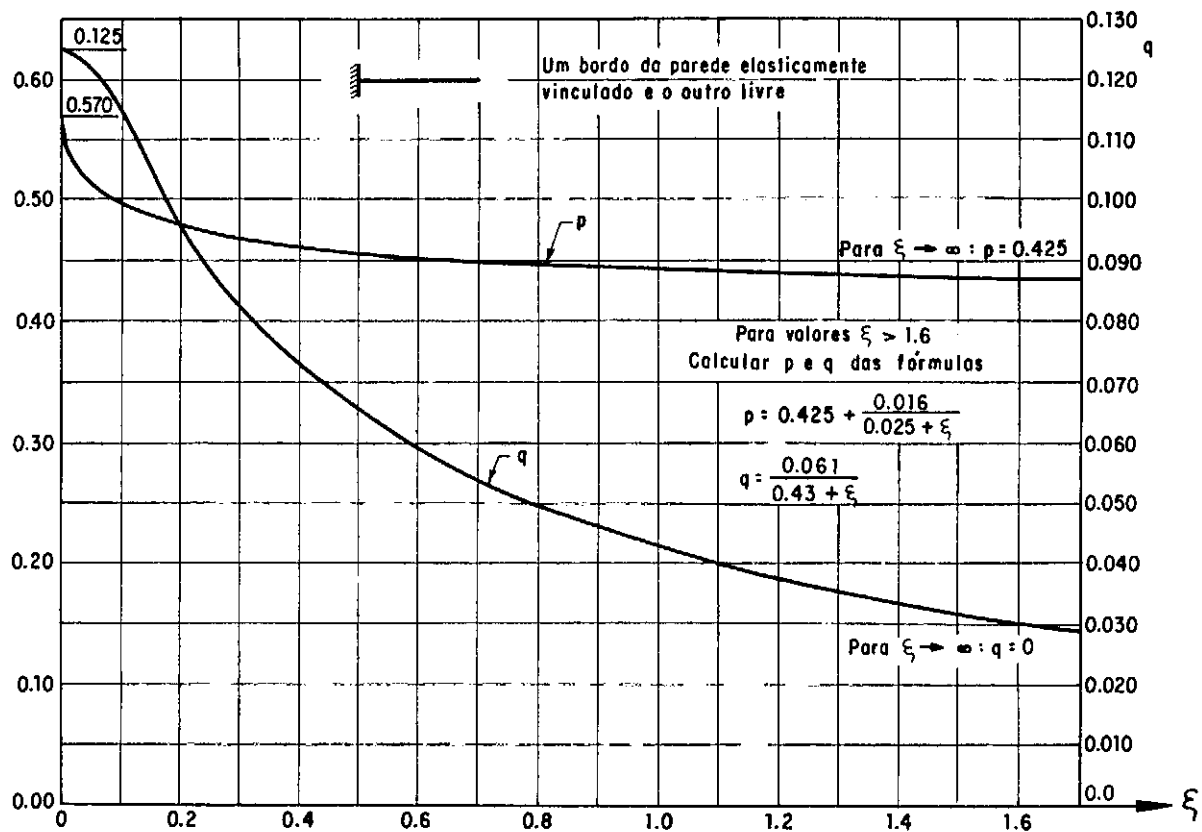


Fig. III.5

cia da diminuição do valor de  $q$ . No caso limite de um bordo simplesmente apoiado,  $q=0$ , a razão  $\phi_0$  será infinita indicando que a parede sempre flamba em uma meia onda. Com o aumento de  $\phi_0$ , a tensão crítica, ou seja, o valor de  $\sigma_c$  diminui e assintoticamente se aproxima do valor

$$\text{Min } \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 p \quad (III.49)$$

Se um bordo  $b$  da parede for livre para rodar, a parede flambará em uma meia onda, independente do seu comprimento. Todavia, o valor da tensão crítica nunca será inferior ao valor dado pela Equação (III.49) não dependendo do comprimento da parede. Se um bordo da parede for elasticamente engastado, a Equação (III.34) indica que várias meias ondas se formarão se o comprimento da parede for suficientemente grande.

As condições de estabilidade expressas pelas Equações (III.23) e (III.48) têm sido recentemente resolvidas, com boa aproximação por Lundquist e Stowell [23], para vários valores de  $\xi$  entre 0 e  $\infty$ . Eles usam um coeficiente de vinculação  $\epsilon = \frac{2}{\xi}$ . Os valores do coeficiente de flambagem da parede,  $K$ , na Equação (III.33) são apresentadas nas publicações de Lundquist e Stowell, por meio de ábacos e tabelas. Comparações feitas mostram que os ábacos (Figura III.3) e (III.5)) dão os valores de  $K$  com um erro menor que 1%.

Supondo a parede apoiada em um dos bordos descarregados e livre no outro tem-se do ábaco da Figura (III.5):

$$p = 0,425 \quad q = 0 \quad K = 0,425$$

Sendo a parede engastada em um dos bordos descarregada e livre no outro, tem-se:

$$p = 0,570 \quad q = 0,125 \quad K = 1,277$$

Resumindo, tem-se os seguintes valores para o coeficiente de flambagem de uma parede retangular de dimensões  $a$  e  $b$  onde  $b \gg a$ .

Condições de apoio dos bordos descarregados $x = 0$ , $x = a$	K
Ambos bordos simplesmente apoiados	4,0
Ambos bordos engastados	6,972
Um bordo simplesmente apoiado e o outro engastado	5,486
Um bordo simplesmente apoiado e o outro livre	0,425
Um bordo engastado e o outro livre	1,277



### III.1.2 - Resultados Obtidos pelo Método de Energia e Pela Equação Diferencial

#### III.1.2.1 - Bordos descarregados $x = 0, x = a$ Simplesmente Apoiados

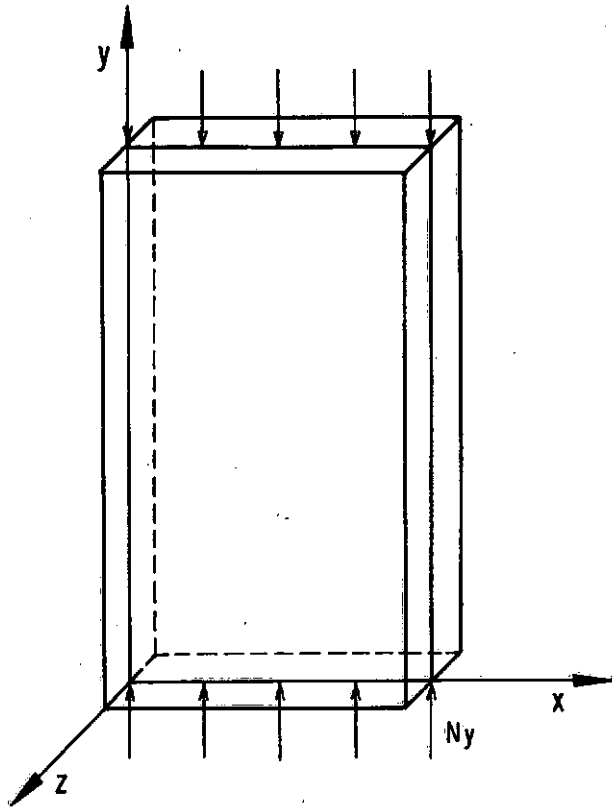


Fig. III.6

A equação diferencial de equilíbrio é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{N_y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (III.50)$$

e as condições de contorno são:

$$\left[ w = 0 \right]_{x=0, a} \quad e \quad \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0, a} \quad (III.51)$$

Seja a solução de (III.50) dada na forma:

$$w = f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (III.52)$$

Em (III.52)  $n$  significa o número de meias ondas nas quais a parede flamba, na direção do carregamento.

Substituindo (III.52) em (III.50) tem-se:

$$\frac{df^4}{dx^4} - \frac{2n^2\pi^2}{b^2} \frac{d^2f}{dx^2} + \left( \frac{n^4\pi^4}{b^2} - \frac{N_y}{D} \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) f = 0 \quad (III.53)$$

A solução de (III.53) é dada por:

$$f(x) = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x \quad (III.54)$$

onde

$$\alpha = \left[ \pm \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \left( \frac{N_y}{D} \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (III.55)$$

Substituindo (III.52) em (III.51) tem-se:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$A_1 \cosh \alpha a + A_2 \sinh \alpha a + A_3 \cos \beta a + A_4 \sin \beta a = 0 \quad (III.56)$$

$$A_1 \gamma^2 - A_3 \delta^2 = 0$$

$$A_1 \gamma^2 \cosh \alpha a + A_2 \gamma^2 \sinh \alpha a - A_3 \delta^2 \cos \beta a - A_4 \delta^2 \sin \beta a = 0$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \alpha^2 - \left\{ \nu \frac{n\pi^2}{b^2} \right. \\ \delta^2 &= \beta^2 + \left. \right\} \end{aligned} \quad (III.57)$$

Fazendo nulo o determinante do sistema formado pelas equações (III.56) tem-se:

$$-(\gamma^2 - \delta^2)^2 \sinh \alpha a \sin \beta a = 0 \quad (III.58)$$

A Equação (III.58) define a condição de estabilidade da parede.

Sejam os parâmetros:

$$K = \frac{N_y a^2}{\pi^2 D} \quad (III.59)$$

$$\phi = \frac{b}{a} \quad (III.60)$$

Substituindo (III.59) e (III.60) em (III.55) tem-se:

$$\frac{\alpha a}{\beta a} = \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} \pm \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \quad (III.61)$$

Chamando

$$\gamma^2 a^2 = r^2 \quad ; \quad \delta^2 a^2 = s^2 \quad (III.63)$$

tem-se

$$\begin{aligned} r^2 &= \left\{ \alpha^2 a^2 - \right. \\ s^2 &= \left. \left\{ \beta^2 a^2 + \right. \right\} \nu n^2 \pi^2 \left( \frac{a}{b} \right) \end{aligned} \quad (III.64)$$

$$r^2 + s^2 = p^2 + q^2 = \frac{2 n \pi^2}{\phi} \sqrt{K} \quad (III.65)$$

Substituindo (III.62) e (III.63) em (III.58) tem-se a equação característica  $(S)S = 0$  a qual define a estabilidade de uma parede retangular apoiada nos quatro bordos.

$$(S)S = -(r^2 + s^2)^2 \sinh p \sin q = 0 \quad (III.66)$$

A equação característica (III.66) define uma relação entre  $n$ ,  $K$  e  $\phi$ . Para uma dada parede, arbitrando-se o valor de  $n$ , procura-se determinar o valor de  $K$  que satisfaz a equação. Para  $n = 1$  e  $\phi = 1$ , tem-se da Equação (III.66),  $K = 4$ .

Substituindo este valor em (III.59) tem-se:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \quad (III.67)$$

O mesmo resultado é obtido pelo método de energia.

Seja a deflexão da superfície média, representada por uma série trigonométrica dupla

$$w = \sum \sum a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (III.68)$$

O potencial total da parede é dado por:

$$\begin{aligned} \pi = & - \frac{1}{2} \iint N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (III.69) \end{aligned}$$

$$\pi = - \frac{1}{2} N_y \sum \sum a_{mn}^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{ab}{4} + \frac{1}{2} D \sum \sum a_{mn}^2 \frac{ab}{4} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (III.69)$$

Procurando o valor de  $N_y$  que torne  $\pi$  estacionário e conseqüentemente um mínimo

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{mn}} = 0$$

$$N_y = \frac{Db^2}{n^2 \pi^2} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2$$

Fazendo-se  $m = 1$ ,  $n = 1$

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \left( \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 2 \right)$$

Para  $\phi = 1$ ,  $K = 4$  e a tensão crítica será dada

também pela Equação (III,67).

### III.2 - EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

Equação característica é a que define a estabilidade de uma parede retangular isolada, sob várias condições de apoio para os bordos descarregados.

Na notação para as funções características,  $S$ ,  $B$ ,  $F$  e  $S_x$  tem sido usadas, respectivamente, para denominar apoio simples, engaste, bordo livre e bordos dispostos simetricamente em relação ao eixo  $x$ . Os parênteses são usados para representar as condições de apoio em  $x=0$ . Assim por exemplo,  $(B)F=0$  é a equação característica para a parede engastada no bordo  $x=0$  e livre no bordo  $x=a$ .

Analogamente ao Item III.1.2.1 onde se deduziu a equação característica  $(S)S=0$ , obter-se-ã as seguintes condições de apoios dos bordos descarregados (veja Apêndice I):

$$(B)B = \left[ 2 pq (1 - \cosh p \cos q) + (p^2 - q^2) \sinh p \sin q \right] = 0 \quad (III.70)$$

$$(B)S = -(r^2 + s^2) (q \sinh p \cos q - p \cosh p \sin q) = 0 \quad (III.71)$$

$$(S)F = -(r^2 + s^2) (q r^4 \sinh p \cos q - p s^4 \cosh p \sin q) = 0 \quad (III.72)$$

$$(B)F = \left[ 2 pq r^2 s^2 + pq (r^4 + s^4) \cosh p \cos q + (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sinh p \sin q \right] = 0 \quad (III.73)$$

$$(S) S_x = -p q (r^2 + s^2) \cosh \frac{p}{2} \cos \frac{q}{2} = 0 \quad (III.74)$$

$$(B) S_x = -p q \left( p \sinh \frac{p}{2} \cos \frac{q}{2} + q \cosh \frac{p}{2} \sin \frac{q}{2} \right) = 0 \quad (III.75)$$

No estudo da associação de paredes retangulares delgadas, algumas vezes é necessário considerar invertidas as posições dos apoios. Por exemplo, uma parede livre em  $x=0$  e engastada em  $x=a$ , terá a função característica (F)B. As equações (F)B = 0 ou (B)F = 0 conduzem, certamente aos mesmos resultados. A inversão da posição dos apoios dos bordos descarregados não afeta a solução para paredes isoladas mas, frequentemente, a estabilidade de secções estruturais compostas de conjuntos de paredes delgadas, envolve combinações das funções características. Neste caso, o sinal destas funções é importante porque influi no resultado global. Por isto, são dadas aqui, as relações entre as mesmas.

$$(S)S = (S)S$$

$$(B)B = (B)B$$

$$(B)S = -(S)B$$

$$(S)F = -(F)S \quad (III.76)$$

$$(B)F = (F)B$$

$$(S)S_x = -(S_x)S$$

$$(B)S_x = -(S_x)B$$

## CAPÍTULO IV

### ASSOCIAÇÃO DE PAREDES

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

A teoria da estabilidade de estruturas compostas de paredes delgadas associadas, fundamenta-se na teoria da estabilidade de paredes retangulares, nas quais forças de compressão uniformemente distribuídas atuam em dois bordos opostos. Esta teoria é confirmada por vários testes no regime elástico e inelástico.

No projeto de peças comprimidas, quaisquer que sejam suas rijezas, a tensão admissível para a peça é a que corresponde à menor resistência a algum dos possíveis tipos de instabilidade:

##### 1) Geral ou Primária

É aquela na qual a secção transversal translada ou gira, ou ambos, mas não distorce no seu próprio plano (Figura IV.1).

##### 2) Local ou Secundária

É aquela na qual a secção transversal distorce em seu próprio plano mas, não translada e nem gira (Figura IV.2).



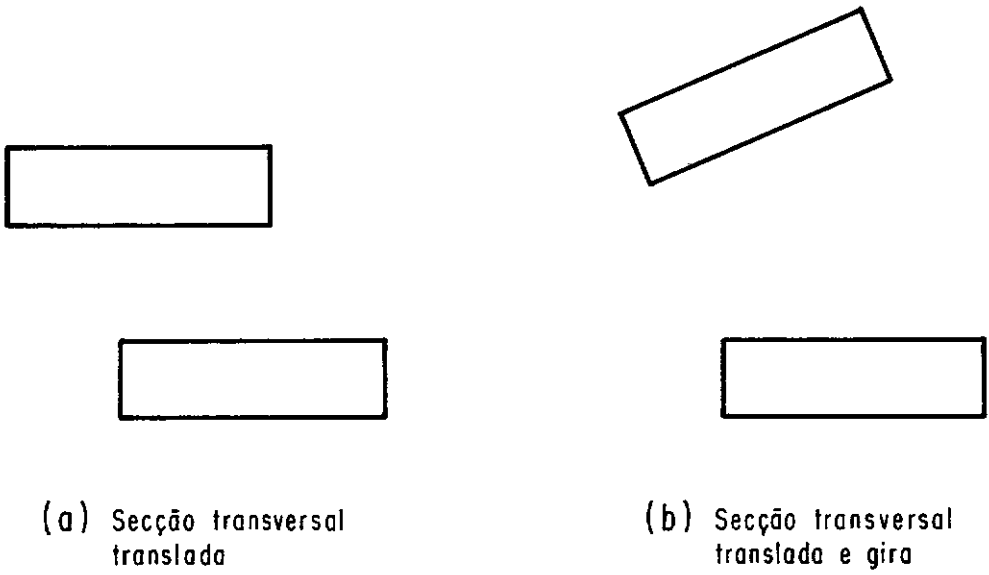


Fig. IV.1 - Modo crítico primário da estrutura.

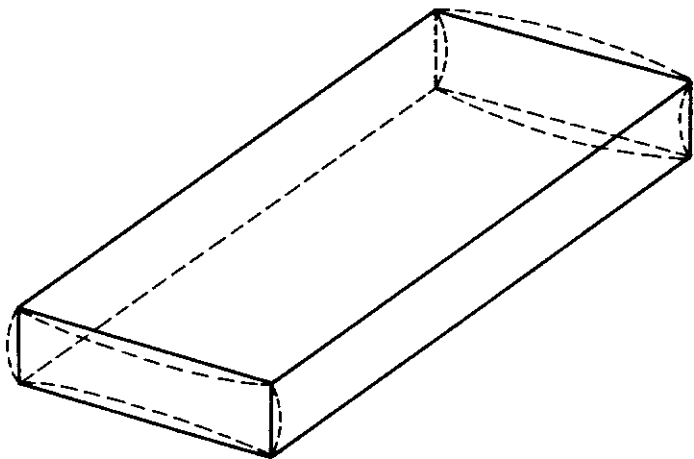


Fig. IV.2 - Modo crítico secundário - Secção transversal distorce.

O problema a ser discutido aqui é o da instabilidade local elástica, de uma estrutura composta de paredes delgadas comprimidas. A estrutura pode ser quanto à forma da sua secção transversal, aberta ou fechada. Se aberta, os bordos extremos podem ou não estar ligados à flanges externas. Uma equação de estabilidade global, baseada na teoria das pequenas deflexões da parede fletida, origina-se das condições a que devem satisfazer os bordos comuns e extremos da estrutura.

Observa-se que a tensão de compressão crítica causa um modo de flambagem que acarreta certo número de meias ondas senoidais, na direcção longitudinal. Este número de meias ondas é comum a todas as paredes componentes da estrutura. Na equação de estabilidade global, um determinante de alta ordem, nulo, conduz à expansão de determinantes secundários de 4.<sup>a</sup> ordem, relacionando as funções características já deduzidas no Capítulo anterior.

Em geral, a maior ou menor complexidade da equação que rege a estabilidade de uma estrutura e conseqüentemente da sua solução depende essencialmente da forma da sua secção transversal.

#### IV.2 - CONSIDERAÇÕES BÁSICAS

Na estrutura composta por um certo número de paredes retangulares ligadas entre si pelos bordos longitudinais, ocorre instabilidade local e para estudá-la admite-se as seguintes hipóteses:

1. Bordos comuns às paredes componentes permanecem retos;
2. O ângulo original entre paredes adjacentes com um bordo comum, não varia durante a flambagem;
3. Os comprimentos das ondas nas quais todas as paredes flambam simultaneamente, são iguais.

Há exceções. Por exemplo, quando grande número de paredes são ligadas para formar uma estrutura de secção transversal aberta, com um ângulo muito raso entre paredes adjacentes, de modo que a superfície da estrutura se aproxima da forma de uma casca, há a possibilidade de distorção do bordo comum. Secções com uma grande variação na espessura das paredes componentes perderiam continuidade na junção. Contudo, de uma maneira geral, as hipóteses acima, ilustradas na Figura (IV.3) se verificam.

O problema pode ser resolvido pela solução da equação diferencial de equilíbrio global ou pelo método de energia.

Considerando a solução da equação diferencial de equilíbrio, há duas aplicações distintas: uma se refere a estruturas cuja secção transversal tem uma configuração repetitiva básica consistindo de duas ou mais paredes com um bordo comum e uma variedade de condições para os outros bordos. A outra consiste de paredes consecutivas (Figura IV.4).

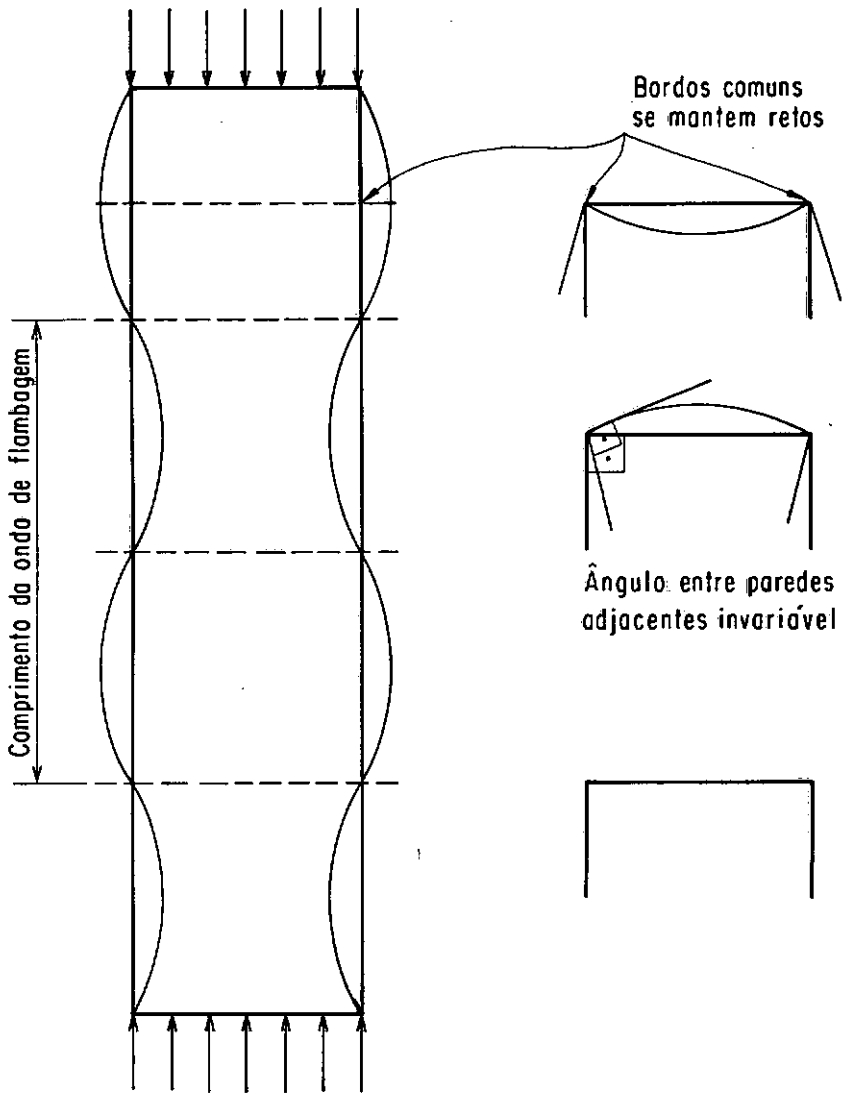


Fig. IV.3 - Flambagem local de secções de paredes finas.

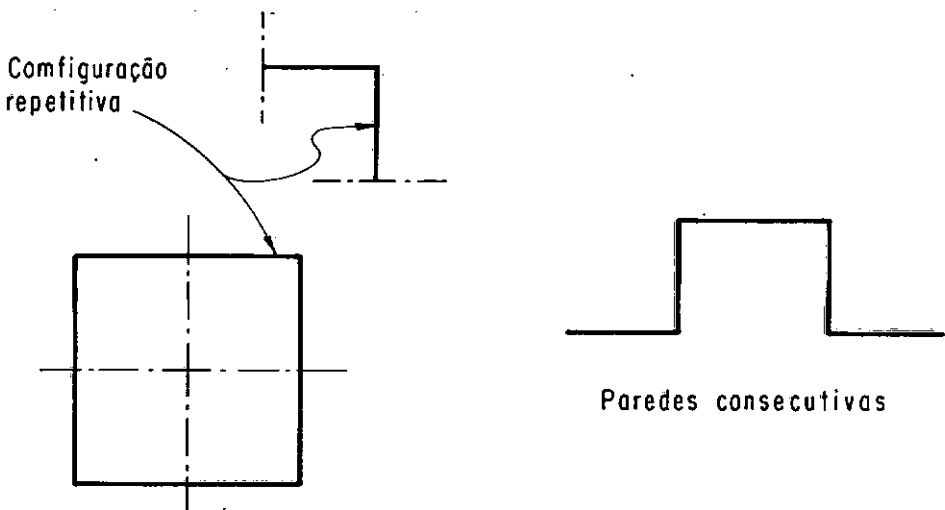


Fig. IV.4 - Configurações básicas de secções.

### IV.3 - EQUAÇÕES GERAIS DE ESTABILIDADE

A Figura (IV.5) mostra a secção estrutural formada de  $n$  paredes tendo um bordo comum em  $x = 0$  e condições de apoio arbitrárias em  $x = a_1, 2, \dots, n$ . Estas são definidas pela geometria da secção e são exemplos típicos:

$x = a$  livre: flange de secções I ou canal;

$x = \frac{a}{2}$  no plano de simetria: alma de secções I ou canal;

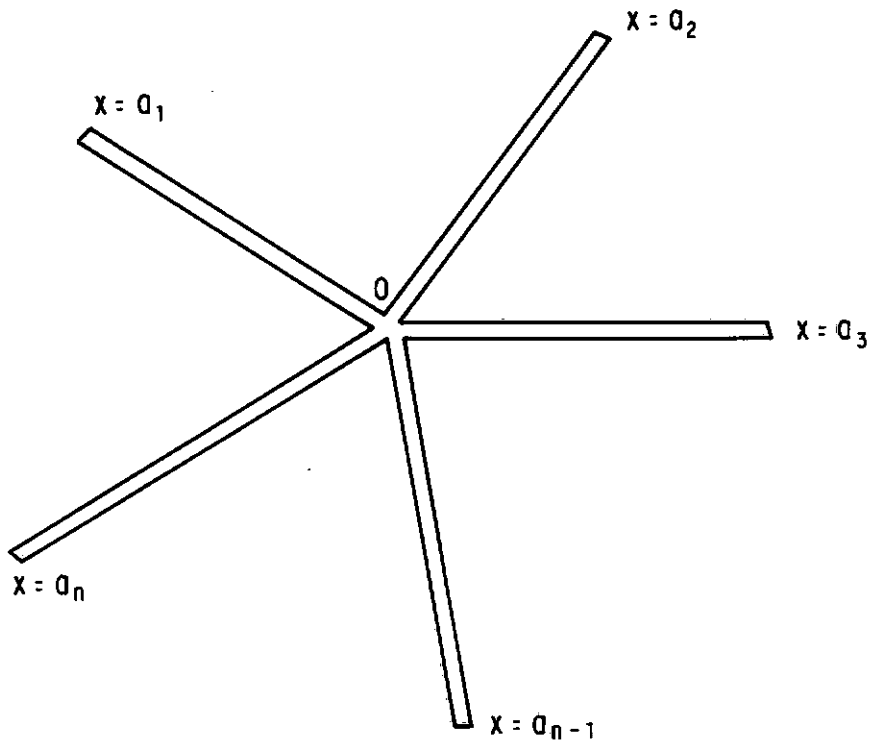


Fig. IV.5 - Configuração de "bordo comum" de  $n$  paredes.

Seja a  $r$ -ésima parede componente da secção estrutural mostrada na Figura (IV.5), de largura  $a_r$  e espessura  $h_r$ .

O bordo  $[x=0]_r$  permanece reto. Logo,

$$\left[ (w = 0)_{x=0} \right]_r \quad (IV.1)$$

A inclinação original entre a  $r$ ésima e  $(r+1)$ ésima paredes se mantém. Então,

$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_r - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_{r+1} = 0 \quad (IV.2)$$

Há também o equilíbrio de momentos de todas as paredes em torno de  $O_y$ .

$$\sum_{r=1}^n \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_r = 0 \quad (IV.3)$$

A equação (IV.1) resulta em  $n$  equações, a Eq.(IV.2) em  $(n-1)$  e a (IV.3) em uma equação. Duas condições para cada um dos bordos  $x=a_1, 2, 3, \dots, n$  resultam em  $2n$  equações. Tem-se então, um total de  $4n$  equações. Supondo  $n=2$  têm-se oito equações do tipo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1A_1 \\ 1A_2 \\ 1A_3 \\ 1A_4 \\ 2A_1 \\ 2A_2 \\ 2A_3 \\ 2A_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (IV.4)$$

Em (IV.4) a 4.<sup>a</sup> linha define igualdade de inclinação das paredes 1 e 2 e a 8.<sup>a</sup> linha define equilíbrio de momentos em torno do bordo comum  $x = 0$ .

Fazendo nulo o determinante de (IV.4) tem-se a solução em função de  $n$ ,  $K$ ,  $\phi$ ,  $\mu_r$  e  $\lambda_r$ , onde:

$$\mu_r = \frac{h_1}{h_r} \quad \text{e} \quad \lambda_r = \frac{a_r}{a_1} \quad (\text{IV.5})$$

Tem-se:

$$K_1 = \frac{\sigma_{cr}}{\pi^2} \left[ \frac{ha^2}{D} \right]_1$$

$$K_r = \frac{\sigma_{cr}}{\pi^2} \left[ \frac{ha^2}{D} \right]_r$$

$$\frac{K_r}{K_1} = \left( \frac{h_r}{h_1} \right) \left( \frac{a_r}{a_1} \right)^2 \left( \frac{D_1}{D_r} \right)$$

Supondo  $E$  e  $\nu$  constantes para todas as paredes componentes, tem-se:

$$\frac{K_r}{K_1} = \lambda_r^2 \mu_r^2 \quad (\text{IV.6})$$

Conclui-se que a estabilidade de um certo número de

paredes com um bordo comum pode ser expressa em função da estabilidade das paredes componentes individuais.

A Figura (IV.6) mostra a secção transversal formada de  $n$  paredes consecutivas. A 1.<sup>a</sup> e a  $n$ .<sup>ésima</sup> paredes têm condições arbitrárias ao longo dos bordos  $|x=0|_1$ , e  $|x=a|_n$ . Nos bordos comuns, supõe-se que não haja variação de inclinação angular e de momento fletor em torno de  $O_y$ , quando a flambagem ocorre.

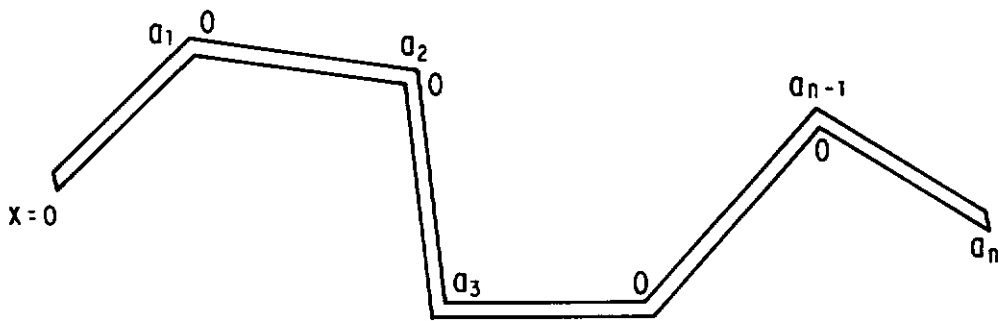


Fig. IV.6 - Configuração de  $n$  paredes consecutivas.

Seja a  $r$ .<sup>ésima</sup> parede componente de largura  $a_r$  e espessura  $h_r$ . Os bordos  $|x=0|_r$  e  $|x=a|_r$  permanecem retos e o ângulo original entre a  $r$ .<sup>ésima</sup> e  $(r+1)$ .<sup>ésima</sup> paredes se mantém. Então:

$$\left| (w=0)_{x=0} \right|_r \quad (IV.7)$$

$$\left| (w=0)_{x=a} \right|_r \quad (IV.8)$$



$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right]_r - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_{r+1} = 0 \quad (IV.9)$$

Há também o equilíbrio de momentos em relação a  $O_y$  ou seja:

$$\left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]_r + \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_{r+1} = 0 \quad (IV.10)$$

Cada uma das equações acima conduz a  $(n-1)$  equações.

Duas condições para cada um dos bordos  $|x=0|_1$  e  $|x=a|_n$  conduzem a quatro equações resultando no total de  $4n$  equações.

Supondo  $n=2$ , tem-se oito equações do tipo:

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	0	0	0	0	$1^A_1$	$= 0$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	0	0	0	0	$1^A_2$	
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	0	0	0	0	$1^A_3$	
$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	$a_{45}$	$a_{46}$	$a_{47}$	$a_{48}$	$1^A_4$	
$a_{51}$	$a_{52}$	$a_{53}$	$a_{54}$	$a_{55}$	$a_{56}$	$a_{57}$	$a_{58}$	$2^A_1$	
0	0	0	0	$a_{65}$	$a_{66}$	$a_{67}$	$a_{68}$	$2^A_2$	
0	0	0	0	$a_{75}$	$a_{76}$	$a_{77}$	$a_{78}$	$2^A_3$	
0	0	0	0	$a_{85}$	$a_{86}$	$a_{87}$	$a_{88}$	$2^A_4$	

(IV.11)

Em (IV.11) a 4.<sup>a</sup> linha define igualdade de inclinação na junção das duas paredes. A 5.<sup>a</sup> linha define equilíbrio de momento em relação ao bordo comum.

Fazendo nulo o determinante, tem-se a solução, que nem sempre pode ser dada numa forma concisa mas é sempre função da estabilidade das paredes componentes.

## CAPÍTULO V

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

#### V.1 - ESTRUTURA COMPOSTA DE UMA ÚNICA PAREDE

V.1.1 - Seja a parede retangular de dimensões  $a$  e  $b$  respectivamente, simplesmente apoiada nos quatro bordos e comprimida uniformemente no seu plano médio, na direção  $y$  pela força  $N_y$  aplicada nos bordos  $y=0$  e  $y=b$  (Figura V.1). Determine o valor da tensão crítica.

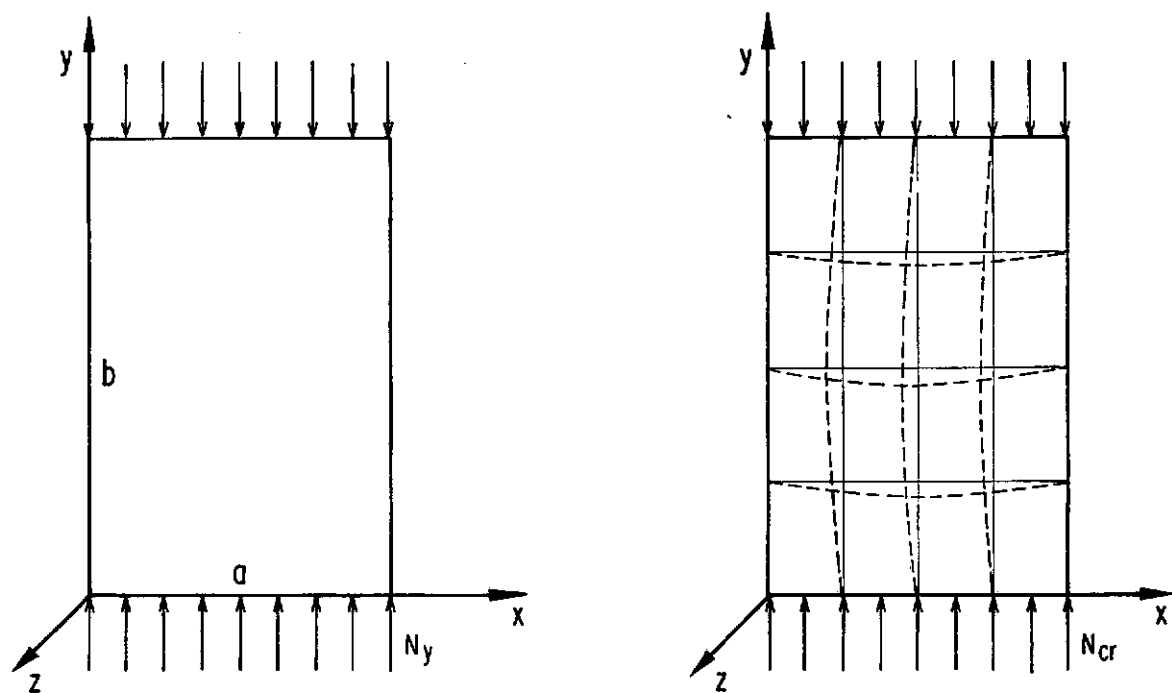


Fig. V.1

A deflexão da superfície média pode ser representada por uma série trigonométrica dupla, do tipo:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (V.1)$$

que satisfaz às condições de contorno:

$$\left[ w = 0 \right]_{\substack{x=0, a \\ y=0, b}} \quad (V.2)$$

$$\left[ M_x = 0 \right]_{x=0, a} \quad (V.3)$$

$$\left[ M_y = 0 \right]_{y=0, b} \quad (V.4)$$

O potencial total da parede é dado por:

$$\begin{aligned} \pi = & -\frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (V.5)$$

Substituindo as derivadas de (V.1) em (V.5) e integrando, tem-se:

$$\pi = -\frac{1}{2} N_y \sum \sum a_{mn}^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{ab}{4} + \frac{1}{2} D \sum \sum a_{mn}^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \frac{ab}{4}$$

O valor de  $N_y$  que torna  $\pi$  um valor estacionário é obtido da condição:

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{mn}} = 0$$

$$N_y = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left( \frac{b^2 m^2}{a^2 n} + n \right) \quad (V.6)$$

O menor valor de  $N_y$  na expressão (V.6) é obtido fazendo-se  $m=1$ . O significado físico é que a parede flamba em uma meia onda na direção perpendicular à carga

$$N_{y_{cr}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left( \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{n} + n \right)^2 \quad (V.7)$$

O primeiro fator na expressão (V.7) é a carga de Euler para uma faixa da parede de largura unitária e comprimento  $b$ . O segundo fator indica em que proporção a estabilidade de uma parede contínua é maior que a estabilidade de uma faixa isolada. Este fator depende da razão  $b/a$  e do número  $n$  que indica o número de meias ondas nas quais a parede flamba na direção do carregamento.

Para uma dada parede, a carga crítica será dada para

$$\frac{\partial N_{y_{cr}}}{\partial n} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \cdot 2 \left( \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{n} + n \right) \left( \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{-1}{n^2} + 1 \right) = 0$$

$$\therefore n = \frac{b}{a} \quad (V.8)$$

ou seja, a carga crítica será obtida supondo o número de meias ondas de flambagem na direção da carga, igual à razão  $\frac{b}{a}$ .

Se  $b = a$ , tem-se a parede quadrada e uma meia onda de flambagem; se  $\frac{b}{a} = 2$  tem-se duas meias ondas de flambagem

na direção do carregamento,

Generalizando, se  $\frac{b}{a} = n$  tem-se  $n$  meias ondas de flambagem. Conclui-se pois, de (V.8), que o número de meias ondas nas quais a parede flamba cresce com  $\frac{b}{a}$ . Uma parede muito longa define meias ondas de flambagem cujos comprimentos se aproximam da largura da parede (Figura V.2).

Fazendo-se em (V.7)  $n=1$  tem-se para a parede quadrada

$$N_{Y_{cr}} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \quad (V.9)$$

Para  $\frac{b}{a} = 1$  tem-se  $N_{Y_{cr}} = \frac{4\pi^2 D}{a^2} \quad (V.9).$

Para outras proporções da parede, a expressão (V.9) pode ser dada

$$N_{Y_{cr}} = K \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (V.10)$$

Na Figura (V.2) tem-se representado o valor de  $K$ . Vê-se que  $K$  é maior para pequenos valores de  $\frac{b}{a}$  e decresce se tornando um mínimo quando  $b=a$  e logo após crescendo novamente.

Supondo duas meias ondas de flambagem  $n=2$ , tem-se uma linha imaginária que divide a parede em meias ondas. É como se existisse uma parede simplesmente apoiada de comprimento  $b/2$ . Substituindo  $\frac{b}{2}$  no lugar de  $b$  em (V.9) tem-se

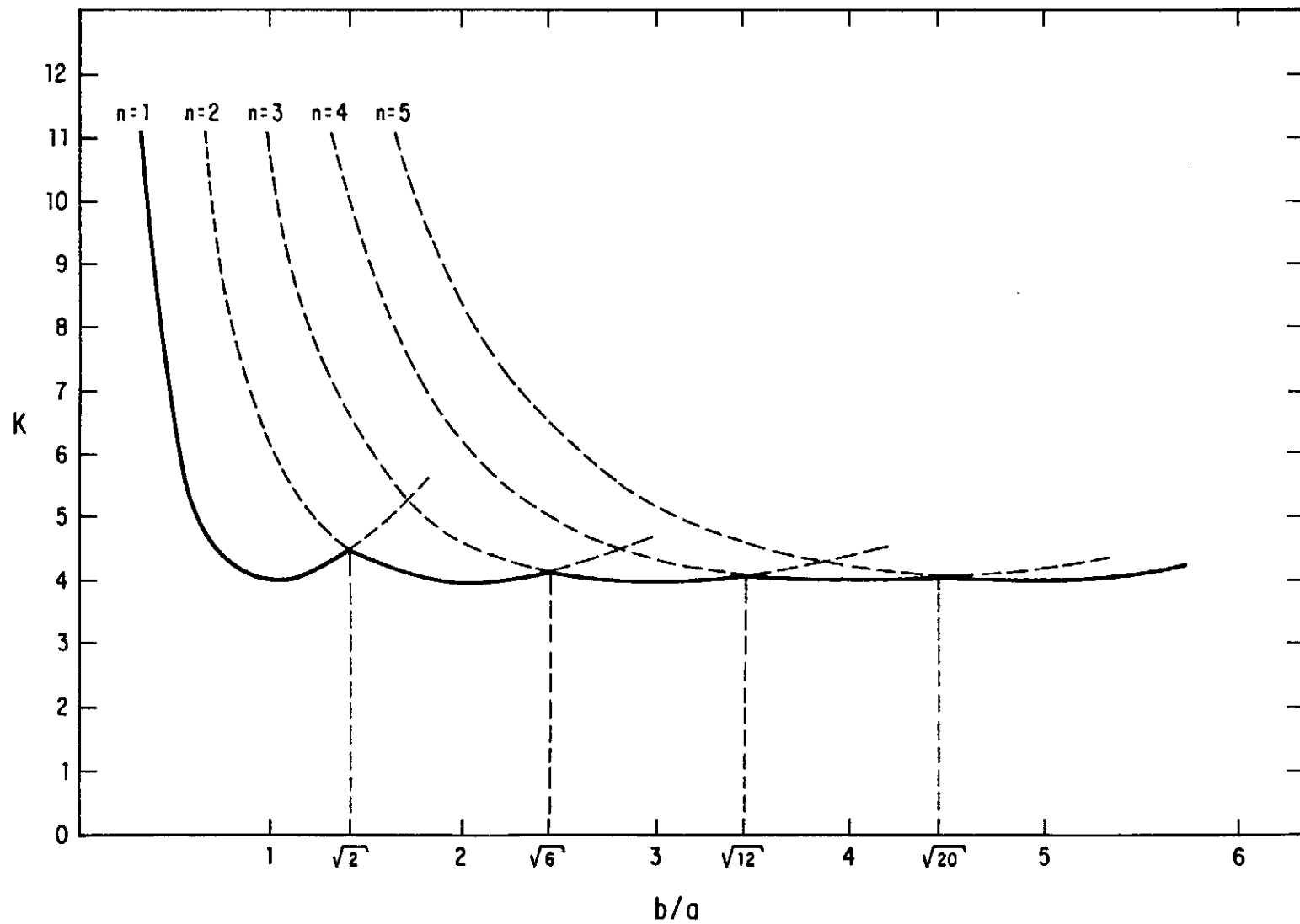


Fig. V.2

$$N_{y_{cr}} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left( \frac{b}{2a} + \frac{2a}{b} \right)^2 \quad (V.11)$$

O segundo fator em (V.11) é representado na Fig. (V.2) pela curva  $n=2$ . Esta pode ser obtida da curva  $n=1$  dobrando-se o valor das abscissas e mantendo-se o mesmo valor das ordenadas. E assim por diante obtém-se a seqüência de curvas para  $n=3, 4, 5$ .

De posse do âbaco da Figura (V.2) pode-se facilmente determinar o valor da carga crítica e o número de meias ondas para um dado valor de  $b/a$ . Só é necessário tomar o ponto correspondente do eixo das abscissas e escolher a curva que possui a menor ordenada para aquele ponto. Na Figura (V.2) as porções das curvas definindo os valores das cargas críticas são mostrados pelas linhas cheias.

Ainda na Figura (V.2) pode-se observar que a razão  $\frac{b}{a}$  se relaciona diretamente com o número de meias ondas de flambagem  $n$ . Para paredes curtas, a curva  $n=1$  dá os menores valores de  $K$ , na Equação (V.10). A partir do ponto de intersecção das curvas  $n=1$  e  $n=2$ , a curva  $n=2$  tem as menores ordenadas ou seja, a parede flamba em duas meias ondas até o ponto de intersecção das curvas  $n=2$  e  $n=3$ . A partir deste ponto, a parede flamba em três meias ondas e assim por diante.

A transição de  $n$  para  $n+1$  meias ondas é dada por



$$\frac{b}{na} + \frac{na}{b} = \frac{b}{(n+1)a} + \frac{(n+1)a}{b}$$

ou

$$\frac{b}{a} = \sqrt{n(n+1)} \quad (V.12)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$   $\frac{b}{a} = \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \dots$  respectivamente.

O número de meias ondas, nas quais a parede flamba aumenta com a razão  $b/a$  e para paredes muito longas,  $n$  é também um número grande. De (V.12) tem-se

$$\frac{b}{a} \approx n \quad (V.13)$$

De (V.13) conclui-se que uma parede muito longa flamba, em meias ondas cujos comprimentos se aproximam da largura da parede. Assim, uma parede na configuração de flambagem, subdivide-se aproximadamente em quadrados.

Da Figura (V.2) determina-se para um determinado valor de  $b/a$ , o número de meias ondas de flambagem. Substituindo em (V.9)  $b/n$  no lugar de  $b$ , tem-se o valor da tensão crítica ou seja,

$$\sigma_{cr} = \frac{K \pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (V.14)$$

V.1.2 - Calcular a tensão crítica  $\sigma_c$  atuante numa parede retangular de dimensões  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  e  $h = 10$  cm, (Figura V.3), apoiada

nos bordos a, livre em um dos bordos b e apoiada no outro, Dados do material:

$$E = 210.000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\nu = \frac{1}{6}$$

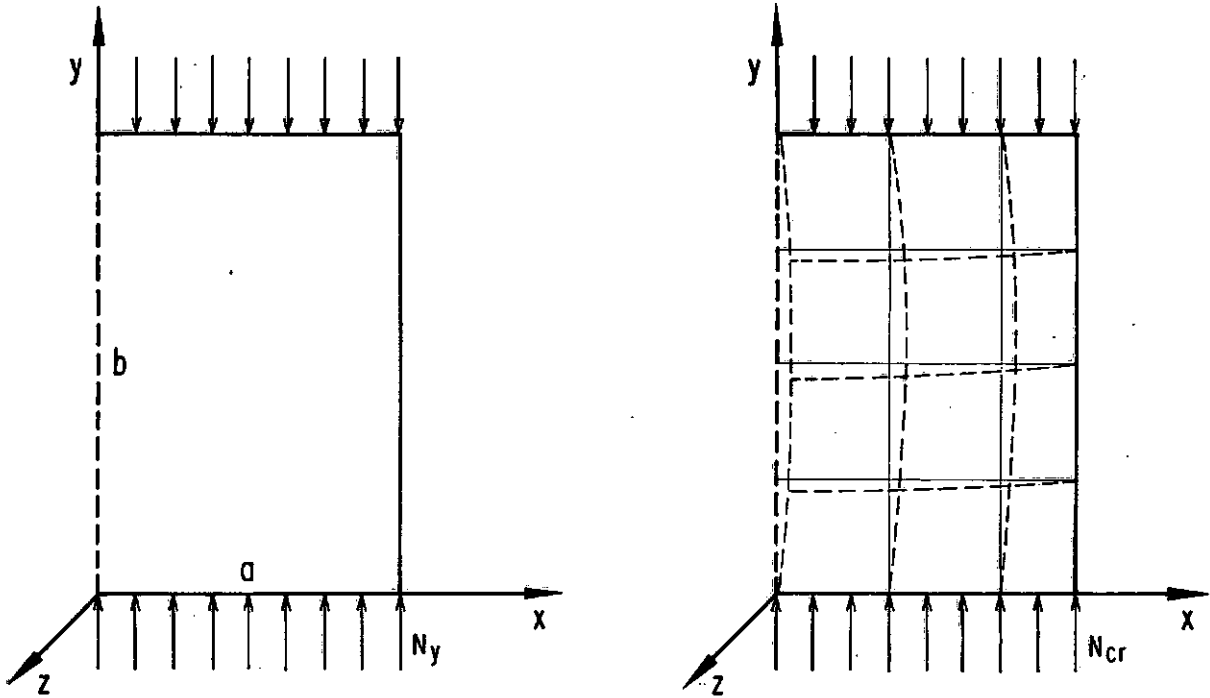


Fig. V.3

A equação diferencial de equilíbrio é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{-N_y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (V.15)$$

Supondo a solução dada na forma:

$$W = f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (V.16)$$

$$f(x) = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x \quad (V.17)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são dados pela Equação (III.55).

As condições de contorno são:

$$\left[ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=0} \quad (V.18)$$

$$\left[ V_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right]_{x=0} \quad (V.19)$$

$$\left[ w = 0 \right]_{x=a} \quad (V.20)$$

$$\left[ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=a} \quad (V.21)$$

Desenvolvendo tem-se:

$$r^2 A_1 - s^2 A_3 = 0$$

$$ps^2 A_2 - qr^2 A_4 = 0 \quad (V.22)$$

$$\cosh p A_1 + \sinh p A_2 + \cos q A_3 + \sin q A_4 = 0$$

$$r^2 \cosh p A_1 + r^2 \sinh p A_2 - s^2 \cos q A_3 - s^2 \sin q A_4 = 0$$

A solução de (V.22) é dada por:

$$(r^2 + s^2) (q r^4 \cos q \sinh p - p s^4 \sin q \cosh p) = 0 \quad (V.23)$$

Substituindo (III.61), (III.62) e (III.64) em (V.23)

tem-se:

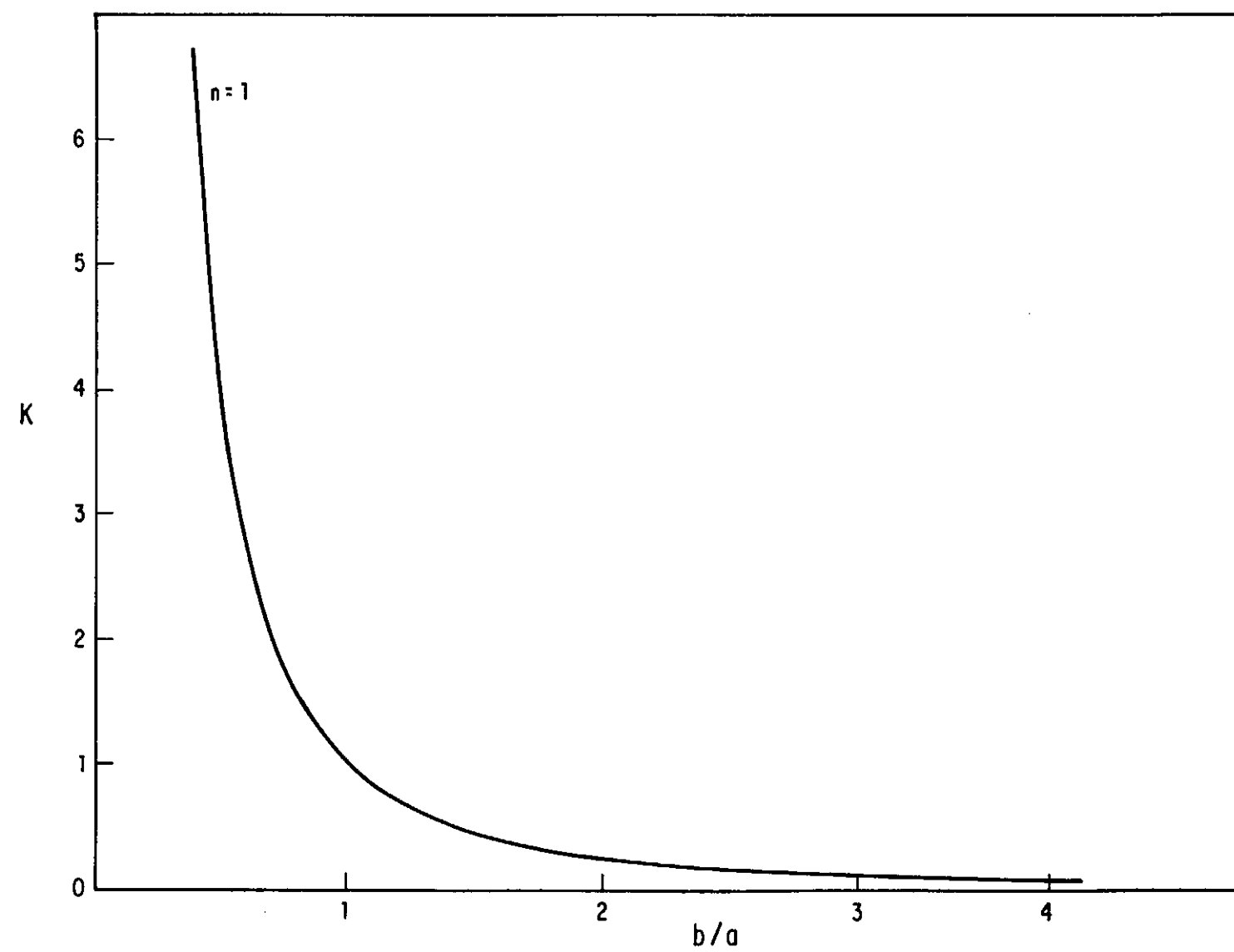


Fig. V.4 - Coeficiente de flambagem para paredes apoiadas em um bordo e livre no outro.

$$\begin{aligned}
& \frac{2n\pi^2 \sqrt{K}}{\phi} \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right. \\
& \quad \cdot \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \cdot \\
& \quad \cdot \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left. \right\} = 0 \quad (V.24)
\end{aligned}$$

$$\phi = \frac{b}{a} = 2 \quad ; \quad K = 0,25 \quad ; \quad \sigma_{cr} = 197,3921 \text{ kgf/cm}^2$$

Veja Apêndice II - Programa para resolução da Equação (V.24) - LIVRE.

V.1.3 - Calcular a tensão crítica  $\sigma_c$  atuante numa parede retangular de dimensões  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  e  $h=10$  cm (Figura V.5) apoiada nos bordos  $\underline{a}$  e em um dos bordos  $\underline{b}$  e engastada no outro.

$$E = 210.000 \text{ kgf/cm}^2 \quad ; \quad v = \frac{1}{6}$$

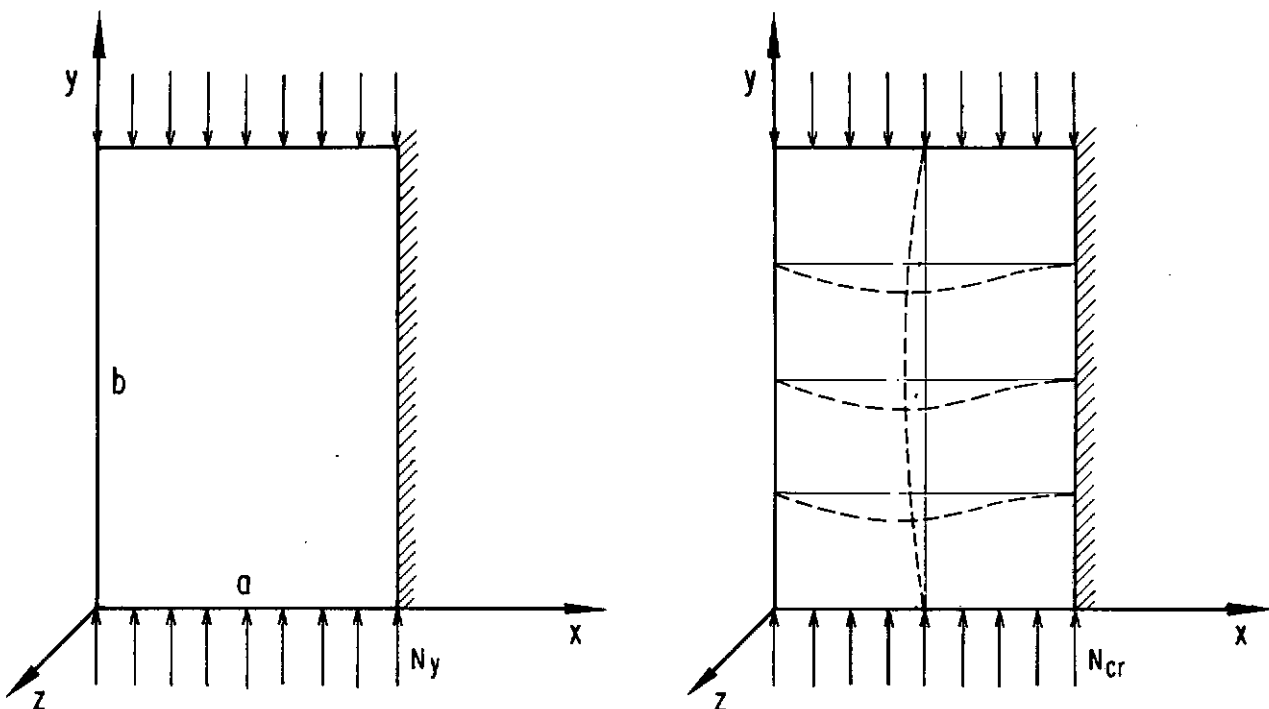


Fig. V.5

A solução da equação diferencial de equilíbrio (V.15) é dada por (V.16) e (V.17).

As condições de contorno são:

$$\left[ w = 0 \right]_{x=0} \quad (V.25)$$

$$\left[ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=0} \quad (V.26)$$

$$\left[ w = 0 \right]_{x=a} \quad (V.27)$$

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right]_{x=a} \quad (V.28)$$

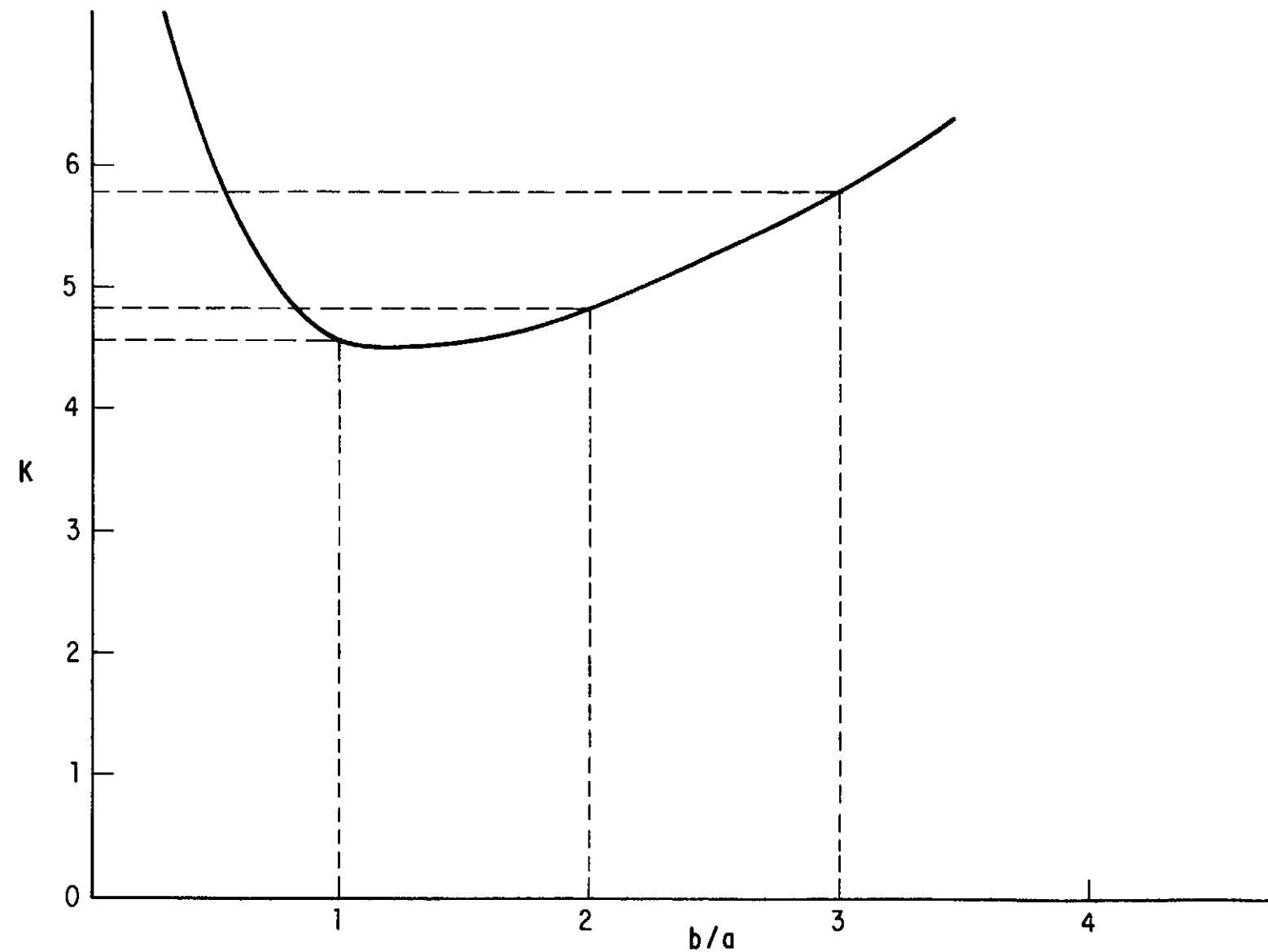


Fig. V.6 - Coeficiente de flambagem para paredes apoiadas em um bordo e engastada no outro.

Desenvolvendo tem-se:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$r^2 A_1 - s^2 A_3 = 0$$

(V.29)

$$\cosh p A_1 + \sinh p A_2 + \cos q A_3 + \sin q A_4 = 0$$

$$p \sinh p A_1 + p \cosh p A_2 - q \sin q A_3 + q \cos q A_4 = 0$$

A solução de (V.29) é dada por:

$$(p^2 + q^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) = 0 \quad (V.30)$$

Substituindo (III.61), (III.62) e (III.64) em (V.30)

tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{2n\pi^2}{\phi} \sqrt{K} \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

(V.31)

$$\phi = \frac{b}{a} = 2 \quad ; \quad K = 4,75 \quad ; \quad \sigma_{cr} = 3750,4499 \text{ kgf/cm}^2$$

Veja Apêndice II - Programa para resolução da Equação (V.31) - AP010.



## V.2 - ESTRUTURA COMPOSTA DE MAIS DE UMA PAREDE

V.2.1 - Seja a estrutura formada pela associação de quatro paredes, mostrada na Figura (V.7). Todas as paredes têm dimensões  $a = 150 \text{ cm}$ ,  $b = 300 \text{ cm}$  e  $h = 10 \text{ cm}$ . Calcular a tensão crítica,

Dados do material:

$$E = 210.000 \text{ kgf/cm}^2 \qquad \nu = \frac{1}{6}$$

A solução da equação diferencial de equilíbrio (V.15) é dada por (V.16) e (.17). As condições de contorno são:

$$\left\{ \left[ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=0} \right\}_1 \quad (\text{V.32})$$

$$\left\{ \left[ V_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right]_{x=0} \right\}_1 \quad (\text{V.33})$$

$$\left[ (w = 0)_{x=a} \right]_1 \quad (\text{V.34})$$

$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right]_1 - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_2 = 0 \quad (\text{V.35})$$

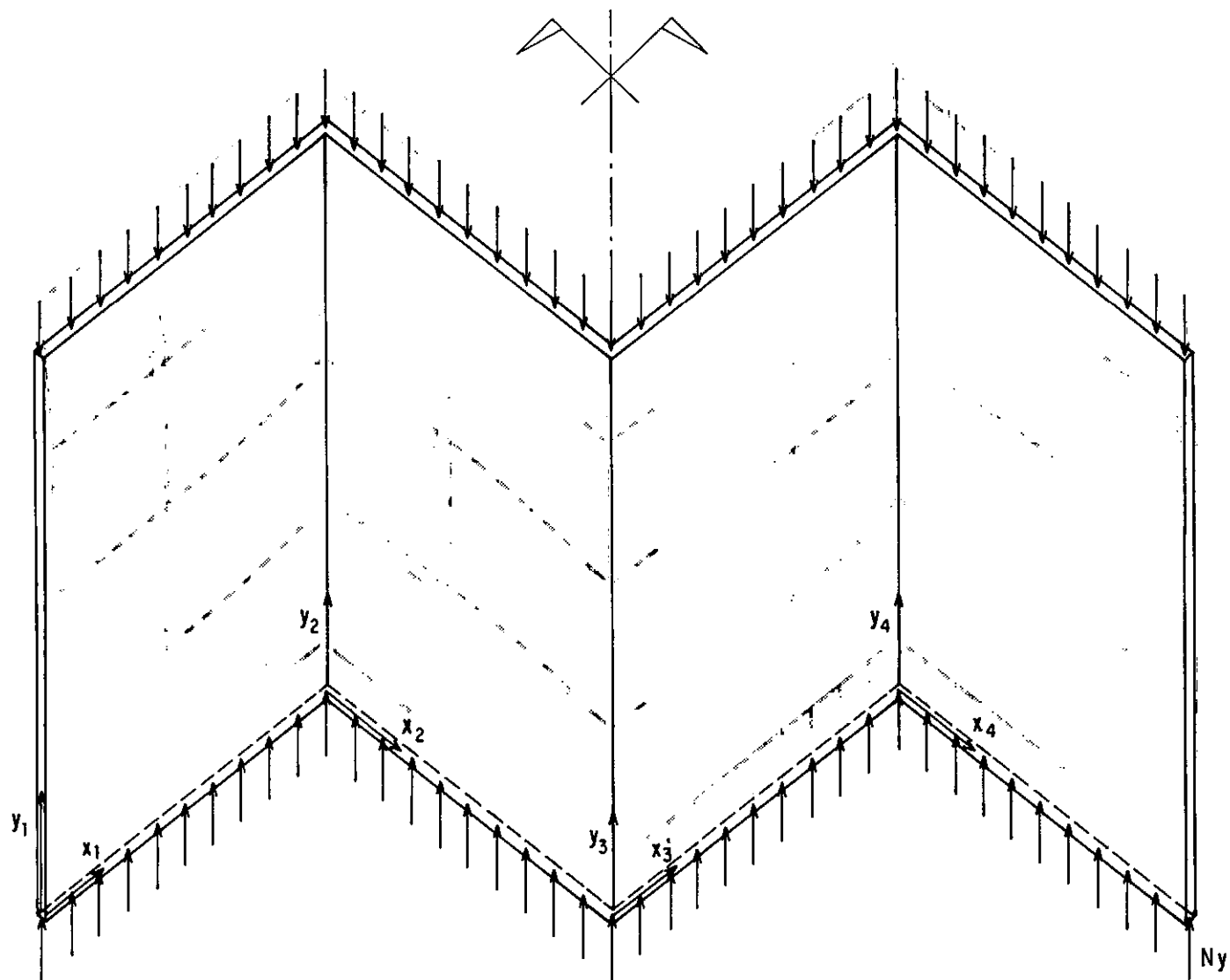


Fig. V.7

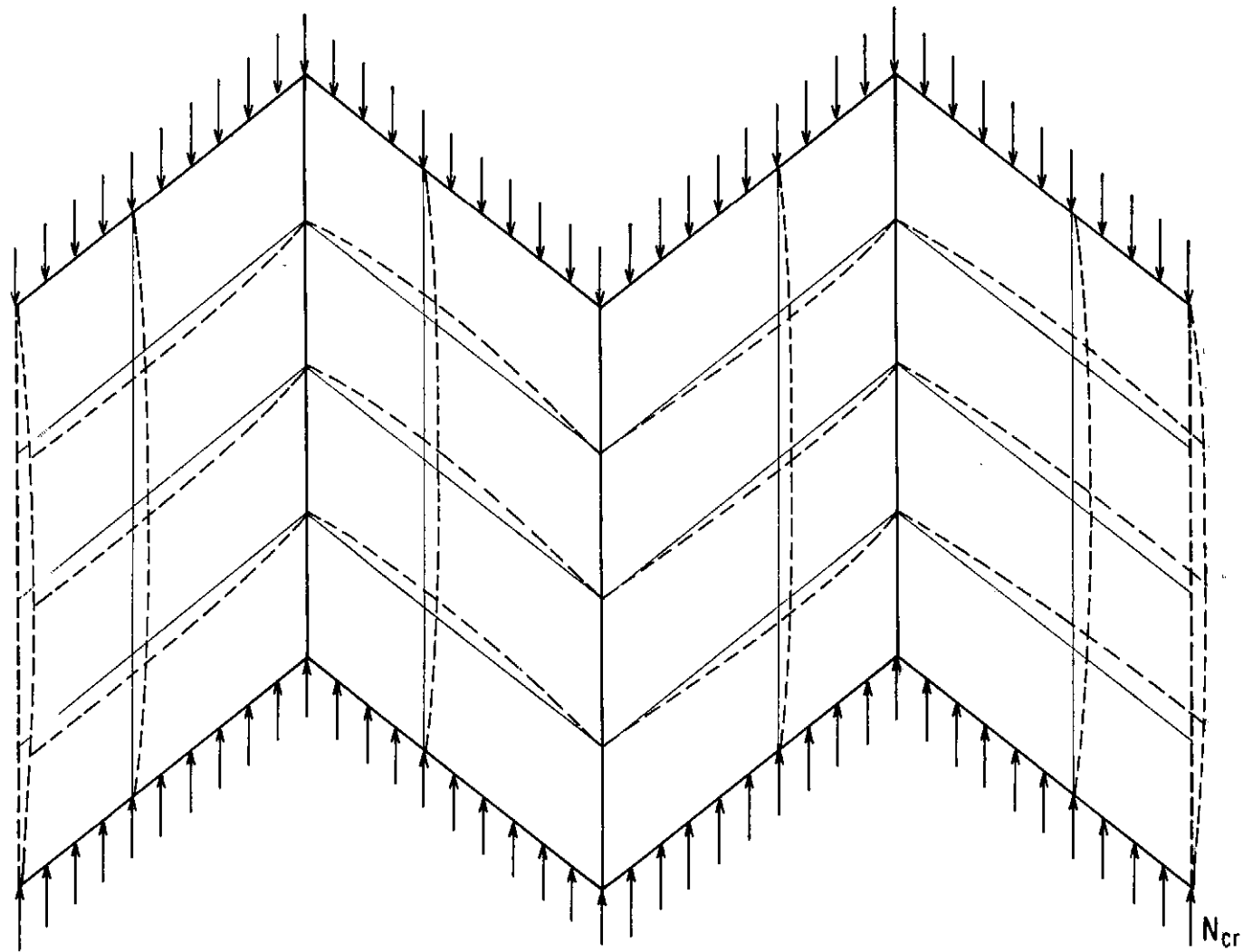


Fig. V.8

$$\left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]_1 + \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_2 = 0 \quad (V.36)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=0} \right]_2 \quad (V.37)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=a} \right]_2 \quad (V.38)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right]_2 - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_3 = 0 \quad (V.39)$$

$$\left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]_2 + \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_3 = 0 \quad (V.40)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=0} \right]_3 \quad (V.41)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=a} \right]_3 \quad (V.42)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right]_3 - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_4 = 0 \quad (V.43)$$

$$\left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]_3 + \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_4 = 0 \quad (V.44)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=0} \right]_4 \quad (V.45)$$

$$\left\{ \left[ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=a} \right\}_4 \quad (V.46)$$

$$\left\{ \left[ V_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right]_{x=a} \right\}_4 \quad (V.47)$$

Levando-se em conta a simetria da estrutura (Figura V.9) tem-se:

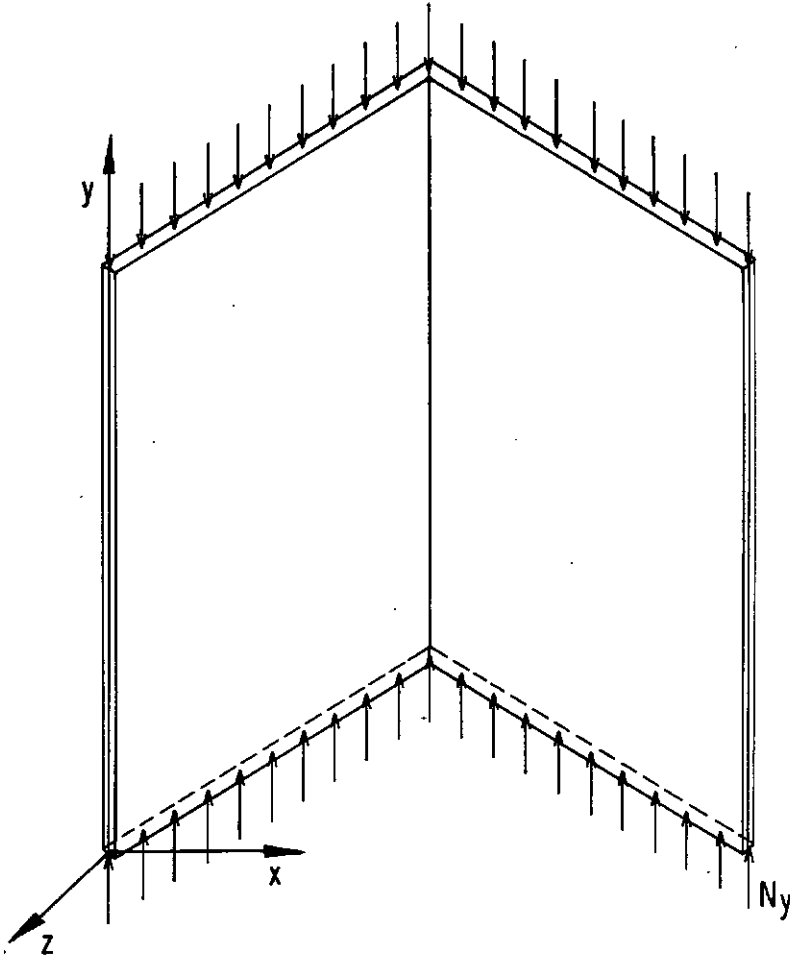


Fig. V.9

As condições de contorno são:

$$\left\{ \left[ M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=0} \right\}_1 \quad (V.48)$$

$$\left\{ \left[ V_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right]_{x=0} \right\}_1 \quad (V.49)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=a} \right]_1 \quad (V.50)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right]_1 - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]_2 = 0 \quad (V.51)$$

$$\left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \right]_1 + \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_2 = 0 \quad (V.52)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=0} \right]_2 \quad (V.53)$$

$$\left[ (w = 0)_{x=a} \right]_2 \quad (V.54)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \right]_{x=a} \right]_2 \quad (V.55)$$

Desenvolvendo tem-se:

$$r_1^2 A_1 - s_1^2 A_3 = 0$$

$$p s_1^2 A_2 - q r_1^2 A_4 = 0$$

$$\cosh p_1 A_1 + \sinh p_1 A_2 + \cos q_1 A_3 + \sin q_1 A_4 = 0$$

$$p \sinh p_1 A_1 + p \cosh p_1 A_2 - q \sin q_1 A_3 + q \cos q_1 A_4 - p_2 A_2 - q_2 A_4 = 0$$

$$r^2 \cosh p_1 A_1 + r^2 \sinh p_1 A_2 - s^2 \cos q_1 A_3 - s^2 \sin q_1 A_4 + r_2^2 A_1 - s_2^2 A_3 = 0$$

$${}_2A_1 + {}_2A_3 = 0$$

$$\cosh p {}_2A_1 + \sinh p {}_2A_2 + \cos q {}_2A_3 + \sin q {}_2A_4 = 0$$

$$p \sinh p {}_2A_1 + p \cosh p {}_2A_2 - q \sin q {}_2A_3 + q \cos q {}_2A_4 = 0 \quad (V.56)$$

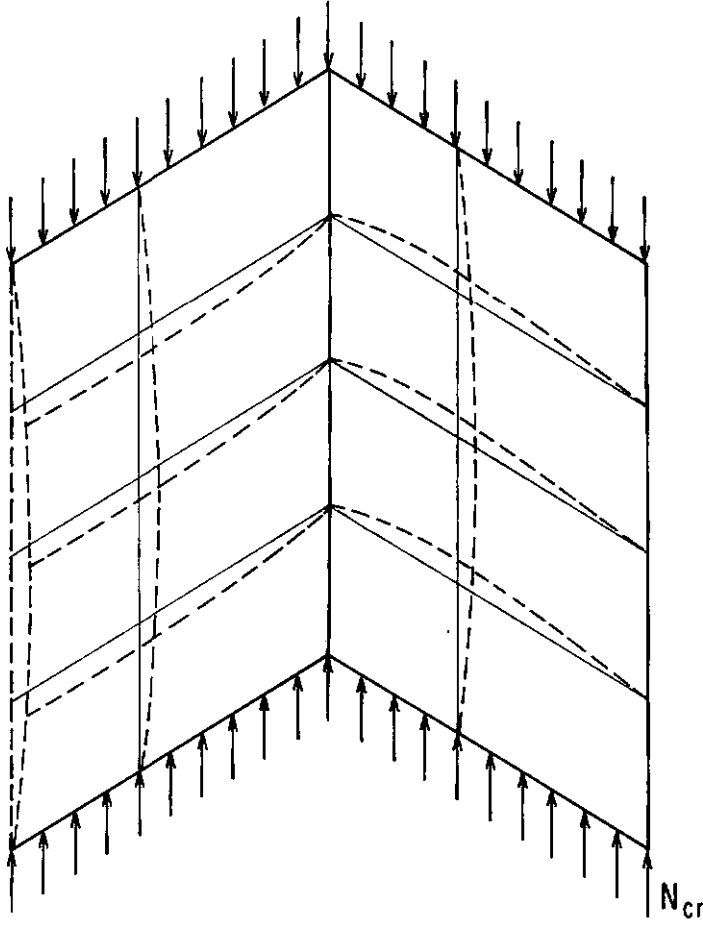


Fig. V.10

A solução de (V.56) (veja Apêndice III) é dada por:

$$\begin{aligned} (r^2 + s^2) \left\{ (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \left[ -2pq r^2 s^2 - pq (r^4 + s^4) \cos q \cosh p - \right. \right. \\ \left. - (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p \right] + \\ + (p s^4 \sin q \cosh p - q r^4 \cos q \sinh p) \left[ 2pq (1 - \cos q \cosh p) + \right. \\ \left. + (p^2 - q^2) \sin q \sinh p \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (V.57)$$

Substituindo (III.61), (III.62) e (III.64) em (V.57) tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2n\pi^2}{\phi} \sqrt{K} \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \right. \\
 & \quad \left. - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} . \\
 & \left\{ -2 \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right] \right. \\
 & \quad ; \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right] - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cdot \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \\
 & \quad \cdot \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \right\} \\
 & \quad \cdot \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right] \right. \\
 & \quad \cdot \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right] \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \right\} \\
 & \quad \cdot \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} + \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right. \\
 & \quad ; \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \\
 & \quad \cdot \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cdot \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} ,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \cdot \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left\{ 2 \cdot \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cdot \right. \\
& \cdot \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} + 2 \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \cdot \\
& \cdot \left. \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} = 0 \quad (V.58)
\end{aligned}$$

(V.57) pode ser também dada pelas funções características, ou seja:

$$\frac{(B)S}{(F)S} = - \frac{(B)B}{(F)B} \quad (V.59)$$

$$\phi = \frac{b}{a} = 2 \quad ; \quad K = 0,25 \quad ; \quad \sigma_{cr} = 197,3921 \text{ kgf/cm}^2$$

Veja Apêndice II - Programa para resolução da Equação (V.58) - PAREDES.

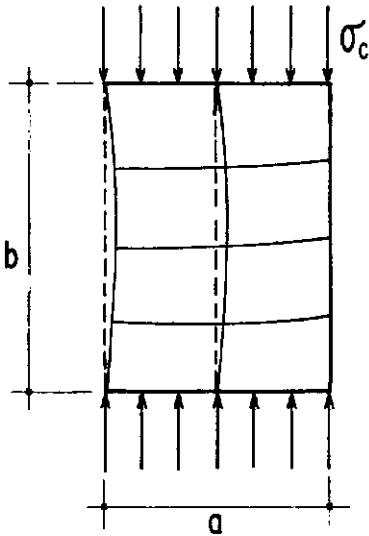
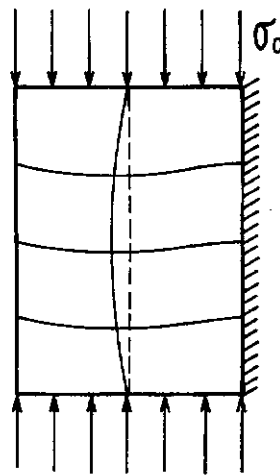
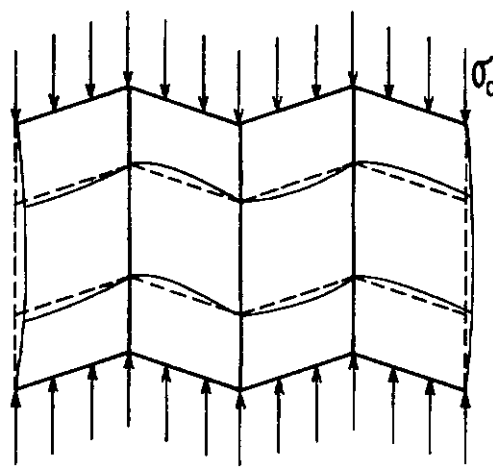
$\sigma_c = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2$ 	$\phi = \frac{b}{a}$	K
	1,0	1,00
	2,0	0,25
	3,0	0,11
	1,0	4,56
	2,0	4,75
	3,0	5,75
	1,0	1,00
	2,0	0,25
	3,0	0,11

Fig. V.11 - Valores do coeficiente de flambagem obtidos.

CAPÍTULO VIICONCLUSÕES

Todas as equações deduzidas dependem da relação  $\frac{n}{\phi}$ . Se se varia o modo de flambagem,  $n$  e a razão  $\phi = b/a$ , na mesma proporção, obtém-se o mesmo coeficiente de flambagem  $K$  e consequentemente, a mesma tensão crítica.

A conclusão mais importante deste presente estudo decorre imediatamente da estrutura da Equação (V.58):

Verifica-se que em todos os termos da referida equação, aparece um fator que se anula para  $\sqrt{K} - \frac{n}{\phi} = 0$ . E esta é precisamente a equação que determina a carga crítica para a parede isolada. Daí a seguinte conclusão importante: com as hipóteses que serviram de base à presente dedução (em especial a permanência retilínea das intersecções de duas paredes), a flambagem local da associação coincide com a de cada parede isoladamente considerada. (N.B.  $\phi$  foi também suposto constante).

Este resultado, que não era de modo nenhum evidente, a priori, só se tornou claro com a obtenção da citada Eq. (V.58).

Para análise, mediante rejeição da hipótese da manutenção da aresta retilínea, caberão futuras pesquisas, em que a complexidade analítica terá que ser contornada pelo uso de métodos numéricos, possivelmente, adoção de elementos finitos, para este fim.

APÊNDICE IEQUAÇÕES CARACTERÍSTICASA.1-Bordos Descarregados  $x=0$ ,  $x=a$  Engastados

As condições de contorno são:

$$(w = 0)_{x=0,a} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} = 0\right)_{x=0,a} \quad (A_1-1)$$

A equação diferencial de equilíbrio é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{N_y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (A_1-2)$$

A solução é dada por:

$$w = (A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A_1-3)$$

Substituindo-se  $(A_1-3)$  em  $(A_1-1)$  tem-se:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$A_1 \cosh p + A_2 \sinh p + A_3 \cos q + A_4 \sin q = 0$$

$(A_1-4)$

$$A_2 p + A_4 q = 0$$

$$A_1 p \sinh p + A_2 p \cosh p - A_3 q \sin q + A_4 q \cos q = 0$$

Procurando a solução não trivial de (A<sub>1</sub>-4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ \cosh p & \sinh p & \cos q & \sin q \\ p \sinh p & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} p & 0 & q \\ \sinh p & \cos q & \sin q \\ p \cos q & -q \sin q & q \cos q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ \cosh p & \sinh p & \sin q \\ p \sinh p & p \cos p & q \cos q \end{vmatrix} = 0$$

$$pq \cos^2 q - q^2 \sin q \sinh p - pq \cos q \cosh p + pq \sin^2 q +$$

$$+ p^2 \sin q \sinh p + pq \cosh^2 p - pq \sinh^2 p - pq \cos q \cosh p = 0$$

$$2 pq - 2 pq \cos q \cosh p + (p^2 - q^2) \sin q \sinh p = 0$$

$$2 pq (1 - \cos q \cosh p) + (p^2 - q^2) \sin q \sinh p = 0$$

Tem-se a equação característica:

$$B(B) = 2 pq (1 - \cos q \cosh p) + (p^2 - q^2) \sin q \sinh p = 0 \quad (A_1-5)$$

$$B(B) = 2 \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} +$$

$$+ 2 \left( \frac{n\pi^2}{\phi} \right)^2 \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} = 0 \quad (A_1-6)$$

Para  $n=1$

$$\left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} +$$

$$+ 2 \left( \frac{\pi}{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \operatorname{senh} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} = 0$$

$$\left( \frac{\pi^4 K}{\phi^2} - \frac{1}{\phi^2} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} +$$

$$2 \left( \frac{\pi}{\phi} \right)^2 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \operatorname{senh} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{\phi} \left\{ (\pi^4 K - 1)^{1/2} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\pi^2}{\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \operatorname{senh} \left[ \frac{\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} = 0$$

$\phi = 1$

$$(\pi^4 K - 1)^{1/2} \left\{ 1 - \cos \left[ \pi^2 (\sqrt{K} - 1) \right]^{1/2} \cosh \left[ \pi^2 (\sqrt{K} + 1) \right]^{1/2} \right\} +$$

$$2 \pi^2 \operatorname{sen} \left[ \pi^2 (\sqrt{K} - 1) \right]^{1/2} \operatorname{senh} \left[ \pi^2 (\sqrt{K} + 1) \right]^{1/2} = 0$$

$K = 10$

Pelo método de energia, seja a deflexão  $w$ , dada por

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A_1-7)$$

$$(w = 0)_{\substack{x=0 \\ x=a}} ; \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right)_{\substack{x=0 \\ x=a}}$$

0 potencial total  $\bar{e}$ :

$$\begin{aligned} \pi &= -\frac{1}{2} \iint N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ &= 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Bigg\} dx dy \end{aligned} \quad (A_1-8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m 2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum 2 A_m \cdot \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left[ \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{m\pi}{a} \left( -\sin \frac{m\pi x}{a} \right) + \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum 2 A_m \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{2m\pi x}{a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum A_m \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \left( \frac{n\pi}{b} \right) \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum A_m \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \left( -\sin \frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum A_m \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \sum A_m^2 \sin^4\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\frac{n\pi y}{b}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 = \left[ \sum \left( 2 A_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{2m\pi x}{a} - \right. \right.$$

$$\left. - A_m \sin^2\frac{m\pi x}{a} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{n\pi y}{b} \right)^2$$

$$= \sum 4 A_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin^2\frac{n\pi y}{b} \cos^2\frac{2m\pi x}{a} - 4 A_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\frac{n\pi y}{b} \cdot$$

$$\cdot \sin^2\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{2m\pi x}{a} + A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin^4\frac{m\pi x}{a} \sin^2\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum -2 A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\frac{n\pi y}{b} \sin^2\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{2m\pi x}{a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = \sum 4 A_m^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos^2\frac{m\pi x}{a} \cos^2\frac{n\pi y}{b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 &= A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left[ -2 \sin^2\frac{n\pi y}{b} \sin^2\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{2m\pi x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\frac{2m\pi x}{a} \cos^2\frac{n\pi y}{b} \right] \end{aligned}$$



Integrando

$$\iint \sum A_m^2 \operatorname{sen}^4 \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$= \sum A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \iint \operatorname{sen}^4 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \operatorname{sen}^4 \frac{m\pi x}{a} dx &= \frac{3}{8} x - \frac{a}{m\pi} \operatorname{sen} \frac{2m\pi}{a} x + \frac{a}{32m\pi} \operatorname{sen} \frac{4m\pi}{a} x \Big|_0^a \\ &= \frac{3}{8} a \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{y}{2} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2n\pi}{b} y}{\frac{4n\pi}{b}} \Big|_a^b = \frac{b}{2}$$

Tem-se

$$\iint N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx dy = N_y \sum A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{3}{16} ab$$

$$\iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 = \sum 4 A_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \iint \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi y}{b} \cos^2 \frac{2m\pi x}{a} dx dy +$$

$$- \sum 4 A_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \iint \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{2m\pi x}{a} dx dy +$$

$$+ \sum A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \iint \operatorname{sen}^4 \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{y}{2} - \frac{\sin \frac{2n\pi y}{b}}{\frac{4n\pi}{b}} \Big|_0^b = \frac{b}{2}$$

$$\int \cos^2 \frac{2m\pi x}{a} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin \frac{4m\pi x}{a}}{\frac{8m\pi}{a}} \Big|_0^a = \frac{a}{2}$$

$$\int \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{2m\pi x}{a} dx = \int \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{m\pi x}{a} - \sin^4 \frac{m\pi x}{a}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\sin \frac{4m\pi x}{a}}{\frac{32m\pi}{a}} - \frac{3}{8}x + \frac{1}{\frac{4m\pi}{a}} \sin \frac{2m\pi x}{a} + \frac{1}{32a} \sin \frac{4m\pi x}{a} \Big|_0^a$$

$$= \frac{a}{8} - \frac{3}{8}a = \frac{5}{8}a$$

$$\int \sin^4 \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{\frac{4m\pi}{a}} \sin \frac{2m\pi x}{a} + \frac{11}{32 \frac{m\pi}{a}} \sin \frac{4m\pi x}{a} \Big|_0^a = \frac{3}{8}a$$

Tem-se

$$= \sum \left( 4 A_m^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \frac{ab}{4} - 4 A_m^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{5}{16} ab + A_m^2 \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4 \frac{3}{4} ab \right)$$

$$\iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) = \sum - 2 A_m^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2$$

$$\iint \left| \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \left( \cos^2 \frac{m\pi x}{a} - \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \right) + \right.$$

$$\left. 2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} \right| dx dy$$

$$= \sum - 2 A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \iiint \left[ \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{m\pi x}{a} - \right. \\ \left. - \sin^2 \frac{m\pi y}{b} \sin^4 \frac{m\pi x}{a} + 2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} \right]$$

$$\sum - 2 A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left\{ \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{8} - \frac{b}{2} \frac{3}{8} a + 2,0 \right\}$$

$$\sum A_m^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{a \cdot b}{4}\right)$$

$$\pi = - \frac{1}{2} N_y \sum A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{3}{16} ab + \frac{1}{2} D \left\{ \sum \left( A_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 ab - A_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 5 ab + \right. \right. \\ \left. \left. + A_m^2 \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} ab \right) - 2 (1 - \nu) \sum A_m^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{ab}{4} \right\}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_m} = 0$$

$$- N_y A_m \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{3}{16} ab + D \left[ A_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 ab - A_m \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 5 ab + A_m \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \frac{3}{4} ab \right] = 0$$

$$- N_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} ab + D ab \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - 5 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} - 2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] ab = 0$$

$$N_y \pi^2 \frac{3 m^2 b}{16 a} = D \cdot \pi^4 \left[ \frac{3 m^4 b}{16 a^3} + \frac{n^4 a}{b^3} + \frac{m^2 n^2}{2 ab} \right]$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \left[ \frac{1}{\phi^2} + \frac{16 \phi^2}{3} + \frac{8}{3} \right] \quad (A_1.9)$$

$$K = \frac{1}{\phi^2} + \frac{16}{3} \phi^2 + \frac{8}{3}$$

$$\frac{dK}{d\phi} = 0 \implies \phi = 0,66 \quad \text{e} \quad K = 7,3$$

A.2 - BORDOS DESCARREGADOS,  $x = 0$  ENCASTADO E  $x = a$  SIMPLES-  
MENTE APOIADO

As condições de contorno são:

$$(w = 0)_{x=0, a} \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right)_{x=0} \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \quad (A_1.10)$$

A solução da equação diferencial de equilíbrio (A<sub>1</sub>.2) é dada por (A<sub>1</sub>.3). Substituindo (A<sub>1</sub>.3) em (A<sub>1</sub>.10) tem-se:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$(A_1.11)$$

$$A_2 p + A_4 q = 0$$

$$A_1 \cosh p + A_2 \sinh p + A_3 \cos q + A_4 \sin q = 0$$

$$A_1 r^2 \cosh p + A_2 r^2 \sinh p - A_3 s^2 \cos q - A_4 s^2 \sin q = 0$$

A solução não trivial de (A<sub>1</sub>.11) é dada por:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & p & 0 & q \\
 \cos p & \sinh p & \cos q & \sin q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & q \\
 \sinh p & \cos q & \sin q \\
 r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 0 & p & q \\
 \cos p & \sinh p & \sin q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \sinh q
 \end{vmatrix} = 0$$

$$- p s^2 \cos q \sin q - q s^2 \cos q \sinh p - q r^2 \cos q \sinh p +$$

$$+ p s^2 \cos q \sin q + p r^2 \sin q \cosh p + q r^2 \cosh p \sinh p -$$

$$- q r^2 \cosh p \sinh p + p s^2 \sin q \cosh p = 0$$

$$r^2 (p \sin q \cosh p - q \cos q \sinh p) +$$

$$+ s^2 (p \sin q \cosh p - q \cos q \sinh p) = 0$$

$$(r^2 + s^2) (p \sin q \cosh p - q \cos q \sinh p) = 0$$

$$(B) S = (r^2 + s^2) (p \sin q \cosh p - q \cos q \sinh p) = 0$$

(A<sub>1</sub>.12)

### A.3 - BORDOS DESCARREGADOS $x = 0$ SIMPLEMENTE APOIADO E $x = a$ LIVRE

As condições de contorno são:

$$(w = 0)_{x=0} \quad \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=0}$$

$$\left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \right]_{x=a} \quad \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \right]_{x=a} \quad (A_1.13)$$

Substituindo a solução (A<sub>1</sub>.3) da equação diferencial de equilíbrio (A<sub>1</sub>.2) nas condições (A<sub>1</sub>.13) tem-se:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$A_1 r^2 - A_3 s^2 = 0 \quad (A_1.14)$$

$$A_1 r^2 \cosh p + A_2 r^2 \sinh p - A_3 s^2 \cos q - A_4 s^2 \sin q = 0$$

$$A_1 p s^2 \sinh p + A_2 p s^2 \cosh p + A_3 q r^2 \sin q - A_4 q r^2 \cos q = 0$$

A solução não trivial de (A<sub>1</sub>.14) é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ r^2 & 0 & -s^2 & 0 \\ r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q \\ p s^2 \sinh p & p s^2 \cosh p & q r^2 \sin q & -q r^2 \cos q \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -s^2 & 0 \\ r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q \\ p s^2 \cosh p & q r^2 \sin q & -q r^2 \cos q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \sin q \\ p s^2 \sinh p & p s^2 \cosh p & -q r^2 \cos q \end{vmatrix} = 0$$

$$p s^6 \sin q \cosh p - q r^4 s^2 \cos q \sinh p -$$

$$- q r^6 \cos q \sinh p + p r^2 s^4 \sin q \cosh p = 0$$

$$s^2 (p s^4 \sin q \cosh p - q r^4 \cos q \sinh p) +$$

$$+ r^2 (p s^4 \sin q \cosh p - q r^4 \cos q \sinh p)$$

$$(r^2 + s^2) (p s^4 \sin q \cosh p - q r^4 \cos q \sinh p) = 0$$

$$(S) F = - (r^2 + s^2) (q r^4 \cos q \sinh p - p s^4 \sin q \cosh p) = 0 \quad (A_1.15)$$

#### A.4 - BORDOS DESCARREGADOS $x = 0$ ENGASTADO E $x = a$ LIVRE

As condições de contorno são:

$$(w = 0)_{x=0} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} = 0\right)_{x=0} \quad (A_1.16)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\right)_{x=a} \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0\right)_{x=a}$$

Substituindo a solução (A<sub>1</sub>.3) da equação diferencial de equilíbrio (A<sub>1</sub>.2) nas condições (A<sub>1</sub>.16) tem-se:

$$A_1 + A_3 = 0 \quad (A_1.17)$$

$$p A_2 + q A_4 = 0$$

$$r^2 \cosh p A_1 + r^2 \sinh p A_2 - s^2 \cos q A_3 - s^2 \sin q A_4 = 0$$

$$p s^2 \sinh p A_1 + p s^2 \cosh p A_2 + q r^2 \sin q A_3 - q r^2 \cos q A_4 = 0$$

A solução não trivial de (A<sub>1</sub>.17) é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q \\ p s^2 \sinh p & p s^2 \cosh p & q r^2 \sin q & -q r^2 \cos q \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} p & 0 & q \\ r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q \\ p s^2 \cosh p & q r^2 \sin q & -q r^2 \cos q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \sin q \\ p s^2 \sinh p & p s^2 \cosh p & -q r^2 \cos q \end{vmatrix} = 0$$

$$p q r^2 s^2 \cos^2 q + q^2 r^4 \sin q \sinh p + p q s^4 \cos q \cosh p +$$

$$+ p q r^2 s^2 \sin^2 q - p^2 s^4 \sin q \sinh p + p q r^2 s^2 \cosh^2 p -$$

$$- p q r^2 s^2 \sinh^2 p + p q r^4 \cos q \cosh p = 0$$

$$p q r^2 s^2 (\cos^2 q + \sin^2 q) + p q r^2 s^2 (\cosh^2 p - \sinh^2 p) +$$

$$+ p q (r^4 + s^4) \cos q \cosh p + (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p = 0$$



$$2 \, p q \, r^2 s^2 + p q (r^4 + s^4) \cos q \cosh p + (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p = 0$$

$$(B) F = 2 \, p q \, r^2 s^2 + p q (r^4 + s^4) \cos q \cosh p + (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p = 0$$

(A<sub>1</sub>.18)

A.5 - BORDOS DESCARREGADOS  $x = 0$  SIMPLEMENTE APOIADO e  $x = a/2$   
NO PLANO DE SIMETRIA

As condições de contorno são:

$$(w = 0)_{x=0} \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right)_{x=0} \quad (A_1.19)$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right)_{x=\frac{a}{2}} \quad \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right)_{x=\frac{a}{2}}$$

Tem-se então:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$r^2 A_1 - s^2 A_3 = 0 \quad (A_1.20)$$

$$p \sinh \frac{p}{2} A_1 + p \cosh \frac{p}{2} A_2 - q \sin \frac{q}{2} A_3 + q \cos \frac{q}{2} A_4 = 0$$

$$p \sinh \frac{p}{2} A_1 + p \cosh \frac{p}{2} A_2 + q \sin \frac{q}{2} A_3 - q \cos \frac{q}{2} A_4 = 0$$

A solução não trivial de (A<sub>1</sub>.20) é dada por:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 r^2 & 0 & -s^2 & 0 \\
 p \sinh \frac{p}{2} & p \cosh \frac{p}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q \sin \frac{q}{2} & -q \cos \frac{q}{2}
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}
 0 & -s^2 & 0 \\
 p \cosh \frac{p}{2} & 0 & 0 \\
 0 & q \sin \frac{q}{2} & -q \cos \frac{q}{2}
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 r^2 & 0 & 0 \\
 p \sinh \frac{p}{2} & p \cosh \frac{p}{2} & 0 \\
 0 & 0 & -q \cos \frac{q}{2}
 \end{vmatrix} = 0$$

$$-p q s^2 \cos \frac{q}{2} \cosh \frac{p}{2} - p q r^2 \cos \frac{q}{2} \cosh \frac{p}{2} = 0$$

$$(S) S_x = -pq (r^2 + s^2) \cos \frac{q}{2} \cosh \frac{p}{2} = 0 \quad (A_1, 21)$$

#### A.6 - BORDOS DESCARREGADOS $x = 0$ ENGASTADO e $x = a/2$ NO PLANO DE SIMETRIA

As condições de contorno são:

$$(w = 0)_{x=0} \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right)_{x=0}$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \right)_{x=\frac{a}{2}} \quad \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right)_{x=\frac{a}{2}} \quad (A_1, 22)$$

Tem-se então:

$$A_1 + A_3 = 0$$

$$p A_2 + p A_4 = 0 \quad (A_1.23)$$

$$p \sinh \frac{p}{2} A_1 + p \cosh \frac{p}{2} A_2 - q \sin \frac{q}{2} A_3 + q \cos \frac{q}{2} A_4 = 0$$

$$p \sinh \frac{p}{2} A_1 + p \cosh \frac{p}{2} A_2 + q \sin \frac{q}{2} A_3 - q \cos \frac{q}{2} A_4 = 0$$

A solução não trivial de (A<sub>1</sub>.23) é dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & q \sin \frac{q}{2} & -q \cos \frac{q}{2} \\ p \sinh \frac{p}{2} & p \cosh \frac{p}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} p & 0 & q \\ 0 & q \sin \frac{q}{2} & -q \cos \frac{q}{2} \\ p \cosh \frac{p}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & -q \cos \frac{q}{2} \\ p \sinh \frac{p}{2} & p \cosh \frac{p}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-p q^2 \sin \frac{q}{2} \cosh \frac{p}{2} - p^2 q \cos \frac{q}{2} \sinh \frac{p}{2} = 0$$

$$-pq (q \sin \frac{q}{2} \cosh \frac{p}{2} + p \cos \frac{q}{2} \sinh \frac{p}{2}) = 0$$

$$(B) S_x = -pq (p \cos \frac{q}{2} \sinh \frac{p}{2} + q \sin \frac{q}{2} \cosh \frac{p}{2}) = 0 \quad (A_1.24)$$

APÊNDICE IIA<sub>II.1</sub> - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (V.24)

01 LBL LIVRE	26 RCL 04	51 RCL 05	76 16
02 N?	27 *	52 *	77 /
03 PROMPT	28 SQRT	53 SQRT	78 RCL 04
04 STO 01	29 STO 06	54 COS	79 RCL 05
05 FI?	30 PI	55 STO*06	80 *
06 PROMPT	31 RCL 01	56 RCL 07	81 +
07 STO 02	32 *	57 RCL 05	82 x / 2
08 K?	33 RCL 02	58 *	83 STO 09
09 PROMPT	34 /	59 SQRT	84 RCL 08
10 SQRT	35 x / 2	60 STO 08	85 STO*09
11 STO 03	36 6	61 CHS	86 RCL 04
12 RCL 01	37 /	62 e / x	87 RCL 05
13 RCL 02	38 CHS	63 CHS	88 *
14 /	39 RCL 01	64 RCL 08	89 SQRT
15 CHS	40 RCL 02	65 e / x	90 SEN
16 RCL 03	41 /	66 +	91 STO*09
17 +	42 RCL 03	67 2	92 RCL 08
18 STO 04	43 +	68 /	93 CHS
19 RCL 01	44 STO 07	69 STO*06	94 e / x
20 PI	45 RCL 05	70 RCL 01	95 RCL 08
21 x / 2	46 *	71 PI	96 e / x
22 *	47 +	72 *	97 +
23 RCL 02	48 x / 2	73 RCL 02	98 2
24 /	49 STO * 06	74 /	99 /
25 STO 05	50 RCL 04	75 x / 2	100 STO*09

101 RCL 09	110 RCL 01
102 CHS	111 *
103 RCL 06	112 2
104 +	113 *
105 RCL 03	114 RCL 02
106 *	115 /
107 PI	116 STOP
108 x $\nearrow$ 2	117 END
109 *	

# A<sub>11</sub>.2 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (V.31)

01 LBL APOIO	17 +	33 STO*09	49 +
02 N?	18 STO 05	34 RCL 01	50 2
03 PROMPT	19 RCL 01	35 RCL 02	51 /
04 STO 01	20 PI	36 /	52 STO*09
05 FI?	21 x $\nearrow$ 2	37 RCL 03	53 RCL 04
06 PROMPT	22 *	38 +	54 RCL 05
07 STO 02	23 RCL 02	39 STO 06	55 *
08 K?	24 /	40 RCL 04	56 SQRT
09 PROMPT	25 STO 04	41 *	57 SEN
10 SQRT	26 RCL 05	42 SQRT	58 STO 08
11 STO 03	27 RCL 04	43 STO 07	59 RCL 07
12 RCL 01	28 *	44 CHS	60 STO*08
13 RCL 02	29 SQRT	45 e $\nearrow$ x	61 RCL 07
14 /	30 STO 09	46 CHS	62 CHS
15 CHS	31 RCL 09	47 RCL 07	63 e $\nearrow$ x
16 RCL 03	32 COS	48 e $\nearrow$ x	64 RCL 07

65 e $\nearrow$ x	76 RCL 01
66 +	77 *
67 2	78 PI
68 /	79 x $\nearrow$ 2
69 STO*08	80 *
70 RCL 08	81 RCL 03
71 CHS	82 *
72 RCL 09	83 RCL 02
73 +	84 /
74 2	85 STOP
75 *	86 END

### A<sub>11</sub>.3 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (V.58)

01 LBL PAREDES	16 RCL 02	31 RCL 02	46 +
02 N?	17 /	32 /	47 2
03 PROMPT	18 STO 04	33 RCL 03	48 /
04 STO 01	19 RCL 01	34 +	49 STO 09
05 FI?	20 RCL 02	35 STO 06	50 STO 20
06 PROMPT	21 /	36 RCL 04	51 RCL 07
07 STO 02	22 CHS	37 *	52 COS
08 K?	23 RCL 03	38 SQRT	53 STO*09
09 PROMPT	24 +	39 STO 08	54 RCL 07
10 SQRT	25 STO 05	40 RCL 08	55 STO*09
11 STO 03	26 RCL 04	41 CHS	56 RCL 08
12 RCL 01	27 *	42 e $\nearrow$ x	57 CHS
13 PI	28 SQRT	43 CHS	58 e $\nearrow$ x
14 x $\nearrow$ 2	29 STO 07	44 RCL 08	59 RCL 08
15 *	30 RCL 01	45 e $\nearrow$ x	60 e $\nearrow$ x

61 +	90 CHS	119 RCL 08	148 RCL 07
62 2	91 RCL 08	120 STO*13	149 x / 2
63 /	92 x ↗ 2	121 RCL 07	150 *
64 STO 10	93 +	122 STO*13	151 STO+14
65 STO 21	94 STO*11	123 RCL 07	152 RCL 07
66 RCL 07	95 RCL 12	124 COS	153 SEN
67 SEN	96 6	125 STO*13	154 STO*14
68 STO*10	97 /	126 RCL 21	155 RCL 20
69 RCL 08	98 RCL 07	127 STO*13	156 STO*14
70 STO*10	99 x ↗ 2	128 RCL 12	157 RCL 14
71 RCL 10	100 +	129 6	158 CHS
72 CHS	101 STO*11	130 /	159 STO+11
73 STO+09	102 RCL 12	131 RCL 07	160 RCL 13
74 RCL 08	103 6	132 x ↗ 2	161 CHS
75 RCL 07	104 /	133 +	162 STO+11
76 *	105 CHS	134 x ↗ 2	163 RCL 12
77 2	106 RCL 08	135 STO 14	164 6
78 CHS	107 x ↗ 2	136 RCL 08	165 /
79 *	108 +	137 x ↗ 2	166 RCL 07
80 STO 11	109 x ↗ 2	138 CHS	167 x ↗ 2
81 RCL 01	110 STO 13	139 STO*14	168 +
82 PI	111 RCL 12	140 RCL 12	169 x ↗ 2
83 *	112 6	141 6	170 STO 15
84 RCL 02	113 /	142 /	171 RCL 08
85 /	114 RCL 07	143 CHS	172 STO*15
86 x ↗ 2	115 x ↗ 2	144 RCL 08	173 RCL 07
87 STO 12	116 +	145 x ↗ 2	174 SEN
88 6	117 x ↗ 2	146 +	175 STO*15
89 /	118 STO+13	147 x ↗ 2	176 RCL 21

177 STO*15	193 STO*16	209 RCL 08	225 STO*15
178 RCL 12	194 RCL 16	210 STO*17	226 RCL 11
179 6	195 CHS	211 2	227 STO*09
180 /	196 STO+15	212 STO*17	228 RCL 15
181 CHS	197 RCL 21	213 RCL 20	229 STO+09
182 RCL 08	198 STO 17	214 STO 18	230 RCL 04
183 $\times \nearrow 2$	199 RCL 07	215 RCL 07	231 RCL 09
184 +	200 COS	216 SEN	232 *
185 $\times \nearrow 2$	201 STO*17	217 STO*18	233 RCL 03
186 STO 16	202 RCL 17	218 RCL 12	234 *
187 RCL 07	203 CHS	219 2	235 2
188 STO*16	204 I	220 *	236 *
189 RCL 07	205 +	221 STO*18	237 STOP
190 COS	206 STO 17	222 RCL 18	238 END
191 STO*16	207 RCL 07	223 STO+17	
192 RCL 20	208 STO*17	224 RCL 17	



APÊNDICE IIIRESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES, (V.56)

$r^2$	0	$-s^2$	0	0	0	0	0	$1A_1$
0	$ps^2$	0	$-qr^2$	0	0	0	0	$1A_2$
$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$-\sin q$	0	0	0	0	$1A_3$
$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	0	$-p$	0	$-q$	$1A_4$
$r^2 \cosh p$	$r^2 \sinh p$	$-s^2 \cos q$	$-s^2 \sin q$	$r^2$	0	$-s^2$	0	$2A_1$
0	0	0	0	1	0	1	0	$2A_2$
0	0	0	0	$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$\sin q$	$2A_3$
0	0	0	0	$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	$2A_4$

= 0

Determinando a solução não trivial, tem-se:

$r^2$	0	$-s^2$	0	0	0	0	0
0	$ps^2$	0	$-qr^2$	0	0	0	0
$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$-\sin q$	0	0	0	0
$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	0	$-p$	0	$-q$
$r^2 \cosh p$	$r^2 \sinh p$	$-s^2 \cos q$	$-s^2 \sin q$	$r^2$	0	$-s^2$	0
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$\sin q$
0	0	0	0	$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$

= 0

$$\begin{array}{c}
 r^2 \\
 \left| \begin{array}{ccccccc}
 ps^2 & 0 & -qr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sinh p & \cos q & \sin q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p \cosh p & -q \sin q & q \cos q & 0 & -p & 0 & -q \\
 r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & -s^2 \sin q & r^2 & 0 & -s^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cosh p & \sinh p & \cos q & \sin q \\
 0 & 0 & 0 & p \sinh p & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q
 \end{array} \right| =
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 -s^2 \\
 \left| \begin{array}{ccccccc}
 0 & ps^2 & -qr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cosh p & \sinh p & \sin q & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p \sinh p & p \cosh p & q \cos q & 0 & -p & 0 & -q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & -s^2 \sin q & r^2 & 0 & -s^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cosh p & \sinh p & \cos q & \sin q \\
 0 & 0 & 0 & p \sinh p & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q
 \end{array} \right| = 0
 \end{array}$$

$pr^2s^2$	$\cos q$	$\sin q$	0	0	0	0	-
	$-q \sin q$	$q \cos q$	0	$-p$	0	$-q$	
	$-s^2 \cos q$	$-s^2 \sin q$	$r^2$	0	$-s^2$	0	
	0	0	1	0	1	0	
	0	0	$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$\sin q$	
	0	0	$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	
$-qr^4$	$\sinh p$	$\cos q$	0	0	0	0	+
	$p \cosh p$	$-q \sin q$	0	$-p$	0	$-q$	
	$r^2 \sinh p$	$-s^2 \cos q$	$r^2$	0	$-s^2$	0	
	0	0	1	0	1	0	
	0	0	$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$\sin q$	
	0	0	$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	
$+ps^4$	$\cosh p$	$\sin q$	0	0	0	0	+
	$p \sinh p$	$q \cos q$	0	$-p$	$-0$	$-q$	
	$r^2 \cosh p$	$-s^2 \sin q$	$r^2$	0	$-s^2$	0	
	0	0	1	0	1	0	
	0	0	$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$\sin q$	
	0	0	$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	
$+qr^2s^2$	$\cosh p$	$\sinh p$	0	0	0	0	= 0
	$p \sinh p$	$p \cosh p$	0	$-p$	0	$-q$	
	$r^2 \cosh p$	$r^2 \sinh p$	$r^2$	0	$-s^2$	0	
	0	0	1	0	1	0	
	0	0	$\cosh p$	$\sinh p$	$\cos q$	$\sin q$	
	0	0	$p \sinh p$	$p \cosh p$	$-q \sin q$	$q \cos q$	

$$\begin{aligned}
 & -pr^2s^2 \begin{vmatrix} \cos q & \sin q & 0 & 0 & 0 \\ -q \sin q & q \cos q & -p & 0 & -q \\ -s^2 \cos q & -s^2 \sin q & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ 0 & 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{vmatrix} \\
 & -pr^2s^2 \begin{vmatrix} \cos q & \sin q & 0 & 0 & 0 \\ -q \sin q & q \cos q & 0 & -p & -q \\ -s^2 \cos q & -s^2 \sin q & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ 0 & 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +qr^4 \begin{vmatrix} \sinh p & \cos q & 0 & 0 & 0 \\ p \cosh p & -q \sin q & -p & 0 & -q \\ r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ 0 & 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{vmatrix} \\
 & +qr^4 \begin{vmatrix} \sinh p & \cos q & 0 & 0 & 0 \\ p \cosh p & -q \sin q & 0 & -p & -q \\ r^2 \sinh p & -s^2 \cos q & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ 0 & 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}
 \cosh p & \sinh p & 0 & 0 & 0 \\
 p \sinh p & p \cosh p & -p & 0 & -q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & 0 & -s^2 & 0 \\
 0 & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\
 0 & 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q
 \end{vmatrix}
 -ps^4
 \begin{vmatrix}
 \cosh p & \sinh p & 0 & 0 & 0 \\
 p \sinh p & p \cosh p & 0 & -p & -q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & r^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\
 0 & 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q
 \end{vmatrix}
 -$$

$$\begin{vmatrix}
 \cosh p & \sinh p & 0 & 0 & 0 \\
 p \sinh p & p \cosh p & -p & 0 & -q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & 0 & -s^2 & 0 \\
 0 & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\
 0 & 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q
 \end{vmatrix}
 -q r^2 s^2
 \begin{vmatrix}
 \cosh p & \sinh p & 0 & 0 & 0 \\
 p \sinh p & p \cosh p & 0 & -p & -q \\
 r^2 \cosh p & r^2 \sinh p & r^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\
 0 & 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q
 \end{vmatrix}
 = 0$$

$$-pr^2s^2 \left\{ \begin{array}{c|cccc} & q\cos q & -p & 0 & -q \\ \hline \cos q & -s^2\sin q & 0 & -s^2 & 0 \\ & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ & 0 & \cosh p & -q\sin q & q\cos q \end{array} \right\} - \sin q \left\{ \begin{array}{c|cccc} & -q\sin q & -p & 0 & -q \\ \hline -\sin q & -s^2\cos q & 0 & -s^2 & 0 \\ & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ & 0 & \cosh p & -q\sin q & q\cos q \end{array} \right\} +$$

$$+ \cos q \left\{ \begin{array}{c|cccc} & q\cos q & 0 & -p & -q \\ \hline -\cos q & -s^2\sin q & r^2 & 0 & 0 \\ & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ & 0 & p\sinh p & p\cosh p & q\cos q \end{array} \right\} - \sin q \left\{ \begin{array}{c|cccc} & -q\sin q & 0 & -p & -q \\ \hline -\sin q & -s^2\cos q & r^2 & 0 & 0 \\ & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ & 0 & p\sinh p & p\cosh p & q\cos q \end{array} \right\} +$$

$$+qr^4 \left\{ \begin{array}{c|cccc} & -q\sin q & -p & 0 & -q \\ \hline \sinh p & -s^2\cos q & 0 & -s^2 & 0 \\ & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ & 0 & \cosh p & -q\sin q & q\cos q \end{array} \right\} - \cos q \left\{ \begin{array}{c|cccc} & p\cosh p & -p & 0 & -q \\ \hline -\cos q & r^2\sinh p & 0 & -s^2 & 0 \\ & 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ & 0 & \cosh p & -q\sin q & q\cos q \end{array} \right\} +$$

$$+ \sinh p \left\{ \begin{array}{c|cccc} & -q\sin q & 0 & -p & -q \\ \hline -\sinh p & -s^2\cos q & r^2 & 0 & 0 \\ & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ & 0 & p\sinh p & p\cosh p & q\cos q \end{array} \right\} - \cos q \left\{ \begin{array}{c|cccc} & p\cosh p & 0 & -p & -q \\ \hline -\cos q & r^2\sinh p & r^2 & 0 & 0 \\ & 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ & 0 & p\sinh p & p\cosh p & q\cos q \end{array} \right\} -$$

$$\begin{array}{c}
 -ps^4 \left\{ \begin{array}{c} \cosh p \\ \cosh p \end{array} \right. \left| \begin{array}{cccc} q \cos q & -p & 0 & -q \\ -s^2 \sin q & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} -\sin q \\ -\sin q \end{array} \left| \begin{array}{cccc} p \sinh p & -p & 0 & -q \\ r^2 \cosh p & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 +\cosh p \left\{ \begin{array}{c} \cosh p \\ \cosh p \end{array} \right. \left| \begin{array}{cccc} q \cos q & 0 & -p & -q \\ -s^2 \sin q & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} -\sin q \\ -\sin q \end{array} \left| \begin{array}{cccc} p \sinh p & 0 & -p & -q \\ r^2 \cosh p & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} - \\ - \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 -qr^2s^2 \left\{ \begin{array}{c} \cosh p \\ \cosh p \end{array} \right. \left| \begin{array}{cccc} p \cosh p & -p & 0 & -q \\ r^2 \sinh p & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} -\sinh p \\ -\sinh p \end{array} \left| \begin{array}{cccc} p \sinh p & -p & 0 & -q \\ r^2 \cosh p & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & \sinh p & \cos q & \sin q \\ 0 & p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 +\cosh p \left\{ \begin{array}{c} \cosh p \\ \cosh p \end{array} \right. \left| \begin{array}{cccc} p \cosh p & 0 & -p & -q \\ r^2 \sinh p & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} -\sinh p \\ -\sinh p \end{array} \left| \begin{array}{cccc} p \sinh p & 0 & -p & -q \\ r^2 \cosh p & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh p & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{array} \right| \begin{array}{c} =0 \\ =0 \end{array}
 \end{array}$$

$$-pr^2s^2 \left\{ s^2 \cos q \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \operatorname{sen} hp & \cos q & \operatorname{sen} q \\ p \cosh p & -q \operatorname{sen} q & q \cos q \end{vmatrix} + s^2 \cos q \begin{vmatrix} q \cos q & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} \right. -$$

$$-s^2 \cos q \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \operatorname{sen} hp & \cos q & \operatorname{sen} q \\ p \cosh p & -q \operatorname{sen} q & q \cos q \end{vmatrix} - s^2 \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} -q \operatorname{sen} q & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} +$$

$$+s^2 \cos q \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ p \operatorname{sen} hp & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + r^2 \cos q \begin{vmatrix} q \cos q & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} -$$

$$-s^2 \cos q \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ p \operatorname{sen} hp & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} - r^2 \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} -q \operatorname{sen} q & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} \left. \right\} +$$



$$+qr^4 \left\{ s^2 \cos q \operatorname{senhp} \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \operatorname{senhp} & \cos q & \operatorname{senq} \\ \operatorname{pcoshp} & -q \operatorname{senq} & q \cos q \end{vmatrix} + s^2 \operatorname{senhp} \begin{vmatrix} -q \operatorname{senq} & -p & -q \\ 0 & \operatorname{senhp} & \operatorname{senq} \\ 0 & \operatorname{pcoshp} & q \cos q \end{vmatrix} + \right.$$

$$+r^2 \cos q \operatorname{senhp} \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \operatorname{senhp} & \cos q & \operatorname{senq} \\ \operatorname{pcoshp} & -q \operatorname{senq} & q \cos q \end{vmatrix} - s^2 \cos q \begin{vmatrix} -\operatorname{pcoshp} & -p & -q \\ 0 & \operatorname{senhp} & \operatorname{senq} \\ 0 & \operatorname{pcoshp} & q \cos q \end{vmatrix} +$$

$$+s^2 \cos q \operatorname{senhp} \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \operatorname{senhp} & \operatorname{senq} \\ p \operatorname{senhp} & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + r^2 \operatorname{senhp} \begin{vmatrix} -q \operatorname{senq} & -p & -q \\ 0 & \operatorname{senhp} & \operatorname{senq} \\ 0 & \operatorname{pcoshp} & q \cos q \end{vmatrix} +$$

$$+r^2 \cos q \operatorname{senhp} \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \operatorname{senhp} & \operatorname{senq} \\ p \operatorname{senhp} & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} - r^2 \cos q \begin{vmatrix} p \cosh p & -p & -q \\ 0 & \operatorname{senhp} & \operatorname{senq} \\ 0 & \operatorname{pcoshp} & q \cos q \end{vmatrix} \left. \right\} -$$

$$-ps^4 \left\{ s^2 \operatorname{sen} q \cosh p \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \operatorname{sen} hp & \cos q & \operatorname{sen} q \\ p \cosh p & -q \operatorname{sen} q & q \cos q \end{vmatrix} + s^2 \cosh p \begin{vmatrix} q \cos q & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ r^2 \operatorname{sen} q \cosh p \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \operatorname{sen} hp & \cos q & \operatorname{sen} q \\ p \cosh p & -q \operatorname{sen} q & q \cos q \end{vmatrix} - s^2 \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} p \operatorname{sen} hp & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} +$$

$$+ s^2 \operatorname{sen} q \cosh p \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ p \operatorname{sen} hp & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + r^2 \cosh p \begin{vmatrix} q \cos q & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} +$$

$$+ r^2 \operatorname{sen} q \cosh p \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ p \operatorname{sen} hp & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + r^2 \operatorname{sen} q \begin{vmatrix} p \operatorname{sen} hp & -p & -q \\ 0 & \operatorname{sen} hp & \operatorname{sen} q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} \left. \right\} -$$

$$-qr^2s^2 \left\{ -r^2 \cosh p \sinh p \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \sinh p & \cos q & \sin q \\ p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{vmatrix} + s^2 \cosh p \begin{vmatrix} p \cosh p & -p & -q \\ 0 & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ r^2 \cosh p \sinh p \begin{vmatrix} -p & 0 & -q \\ \sinh p & \cos q & \sin q \\ p \cosh p & -q \sin q & q \cos q \end{vmatrix} - s^2 \sinh p \begin{vmatrix} p \sinh p & -p & -q \\ 0 & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} -$$

$$+ r^2 \cosh p \sinh p \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \sinh p & \sin q \\ p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} + r^2 \cosh p \begin{vmatrix} p \cosh p & -p & -q \\ 0 & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} +$$

$$+ r^2 \cosh p \sinh p \begin{vmatrix} 0 & -p & -q \\ \cosh p & \sinh p & \sin q \\ p \sinh p & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} - r^2 \sinh p \begin{vmatrix} p \sinh p & -p & -q \\ 0 & \sinh p & \sin q \\ 0 & p \cosh p & q \cos q \end{vmatrix} \Bigg\} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -p r^2 s^2 \left\{ \cos q \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sin q \left[ (r^2 + s^2) (q \sin q) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] \right\} + \\
& + q r^4 \left\{ -q \cos q \sinh p \left[ (r^2 + s^2) (p - q \sin q \sinh p - p \cos q \cosh p) \right] - \right. \\
& \quad - q \sin q \sinh p \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] - \\
& \quad - p \cos q \cosh p \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] - \\
& \quad \left. - p \cos q \sinh p \left[ (r^2 + s^2) (q + p \sin q \sinh p - q \cos q \cosh p) \right] \right\} - \\
& -p s^4 \left\{ -q \sin q \cosh p \left[ (r^2 + s^2) (p - q \sin q \sinh p - p \cos q \cosh p) \right] + \right. \\
& \quad + q \cos q \cosh p \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] - \\
& \quad - p \sin q \cosh p \left[ (r^2 + s^2) (q + p \sin q \sinh p - q \cos q \cosh p) \right] - \\
& \quad \left. - p \sin q \sinh p \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] \right\} - \\
& -q r^2 s^2 \left\{ p \cosh^2 p \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] - \right. \\
& \quad \left. - p \sinh^2 p \left[ (r^2 + s^2) (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (r^2 + s^2) \left\{ \right. & (-p q r^2 s^2 - q^2 r^4 \sin q \sinh p - p q r^4 \cos q \cosh p - \\
 & - p q s^4 \cos q \cosh p + p^2 s^4 \sin q \sinh p - p q r^2 s^2) , \\
 & , (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) - \\
 & -(q^2 r^4 \cos q \sinh p - p q s^4 \sin q \cosh p) (p - q \sin q \sinh p - \\
 & - p \cos q \cosh p) - (p q r^4 \cos q \sinh p - p^2 s^4 \sin q \cosh p) , \\
 & \left. (q + p \sin q \sinh p - q \cos q \cosh p) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 (r^2 + s^2) \left\{ \right. & (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \left| -2 p q r^2 s^2 - p q \cos q \cosh p (r^4 + s^4) - \right. \\
 & - \sin q \sinh p (q^2 r^4 - p^2 s^4) + \\
 & + (p - q \sin q \sinh p - p \cos q \cosh p) (-q^2 r^4 \cos q \sinh p + p q s^4 \sin q \cosh p) + \\
 & + (q + p \sin q \sinh p - q \cos q \cosh p) (-p q r^4 \cos q \sinh p + \\
 & \left. + p^2 s^4 \sin q \cosh p) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r^2 + s^2) & \left\{ (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \left[ -2 pq r^2 s^2 - pq (r^4 + s^4) \cos q \cosh p - \right. \right. \\
& \left. \left. -(q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p \right] - \right. \\
& -p q^2 r^4 \cos q \sinh p + p^2 q s^4 \sin q \cosh p + q^3 r^4 \cos q \sin q \sinh^2 p - \\
& -p q^2 s^4 \sin^2 q \cosh p \sinh p + p q^2 r^4 \cos^2 q \cosh p \sinh p - \\
& -p^2 q s^4 \cos q \sin q \cosh^2 p - p q^2 r^4 \cos q \sinh p + \\
& +p^2 q s^4 \sin q \cosh p - p^2 q r^4 \cos q \sin q \sinh^2 p + \\
& +p^3 s^4 \sin^2 q \cosh p \sinh p + p q^2 r^4 \cos^2 q \cosh p \sinh p - \\
& \left. - p^2 q s^4 \cos q \sin q \cosh^2 p \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r^2 + s^2) & \left\{ (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \left[ -2 pq r^2 s^2 - pq (r^4 + s^4) \cos q \cosh p - \right. \right. \\
& \left. \left. -(q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p \right] + \right. \\
& + (2 p^2 q s^4 \sin q \cosh p - 2 p^2 q s^4 \cos q \sin q \cosh^2 p + \\
& + p^3 s^4 \sin q \cosh p \sinh p - p q^2 s^4 \sin^2 q \cosh p \sinh p) + \\
& + (-2 p q^2 r^4 \cos q \sinh p + 2 p q^2 r^4 \cos^2 q \cosh p \sinh p - \\
& \left. - p^2 q r^4 \cos q \sin q \sinh^2 p + q^3 r^4 \cos q \sin q \sinh^2 p) \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (r^2 + s^2) \left\{ (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \left[ -2 pq r^2 s^2 - pq(r^4 + s^4) \cos q \cosh p - \right. \right. \\
 \left. \left. - (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p \right] + \right. \\
 \left. + p s^4 \sin q \cosh p \left[ 2 pq (1 - \cos q \cosh p) + (p^2 - q^2) (\sin q \sinh p) \right] - \right. \\
 \left. - q r^4 \cos q \sinh p \left[ 2 pq (1 - \cos q \cosh p) + (p^2 - q^2) (\sin q \sinh p) \right] \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (r^2 + s^2) \left\{ (q \cos q \sinh p - p \sin q \cosh p) \left[ -2 pq r^2 s^2 - pq(r^4 + s^4) \cos q \cosh p - \right. \right. \\
 \left. \left. - (q^2 r^4 - p^2 s^4) \sin q \sinh p \right] + \right. \\
 \left. + (p s^4 \sin q \cosh p - q r^4 \cos q \sinh p) \left[ 2 pq (1 - \cos q \cosh p) + \right. \right. \\
 \left. \left. + (p^2 - q^2) \sin q \sinh p \right] \right\} = 0 \quad (V.57)
 \end{aligned}$$

Com a notação das funções características:

$$(B)S \cdot (F)B + (F)S \cdot (B)B = 0$$

$$\frac{(B)S}{(F)S} = - \frac{(B)B}{(F)B} \quad (V.59)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2n\pi^2\sqrt{K}}{\phi} \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} \\
& \left\{ -2 \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right] \right. \\
& \quad \left. : \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right] - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right. \\
& \quad \left. \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 + \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \right\} \right. \\
& \quad \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. , \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right] \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \right\} \\
& \quad , \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} + \left\{ \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right. \\
& \quad \cdot \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) + v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} - \\
& \quad \left. - \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} , \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) - v \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \right]^2 \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \cdot \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left\{ 2 \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right. \\
& \cdot \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \cosh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} + \\
& \left. + 2 \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 \sin \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} - \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \sinh \left[ \frac{n\pi^2}{\phi} \left( \sqrt{K} + \frac{n}{\phi} \right) \right]^{1/2} \right\} = 0
\end{aligned}$$

(V.58)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | <sup>1</sup> | CLEBSCH - Théorie de l'Elasticité des Corps Solides, Paris -  
-Dunod, Éditeur, 1883.
- | <sup>2</sup> | BLEICH, F. - Buckling Strenght of Metal Structures, McGraw  
Hill Book Company, Inc., New York, 1951.
- | <sup>3</sup> | ODEN, J. T. - Mechanics of Elastic Structures, McGraw Hill  
Book Company, U.S.A., 1967.
- | <sup>4</sup> | BULSON, P. S. - The Stability of Flat Plates, Chatto &  
Windus, London, 1970.
- | <sup>5</sup> | TIMOSHENKO, S. P. - Theory of Elastic Stability, McGraw Hill  
Book Company, Inc., Second Edition, New York, 1961.
- | <sup>6</sup> | TIMOSHENKO, S. P. - Teoria da Elasticidade, Editora Guana  
bara Dois S/A., 3<sup>a</sup> Edição, Rio de Janeiro, 1980.
- | <sup>7</sup> | TIMOSHENKO, S. P. - Theory of Plates and Shells, McGraw Hill  
Kogakuska Ltd., Second Edition, New York, 1959.
- | <sup>8</sup> | BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. - Buckling of Bars, Plates and  
Shells, McGraw Hill Kogakusha Ltd., London, 1975.
- | <sup>9</sup> | SZILARD, R. - Theory and Analysis of Plates, Classical and  
Numerical Methods, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs,  
New Jersey, 1974.

- [<sup>10</sup>] UGURAL, A. C. - Stresses in Plates and Shells, McGraw Book Company, U.S.A., 1981.
- [<sup>11</sup>] COX, H. L. - The Buckling of Plates and Shells: The MacMillan Company, New York, 1963.
- [<sup>12</sup>] DYM, C. L.; SHAMES, I. H. - Solid Mechanics - A Variational Approach, McGraw Hill Book Company, Inc., U.S.A., 1973.
- [<sup>13</sup>] BECKER, H. - Buckling of Composite Elements: *National Advisory Committee for Aeronautics* - Technical Note 3782, New York University, Washington, July 1957.
- [<sup>14</sup>] GERARD, D. G.; BECKER, H. - "Buckling of Flat Plates - *National Advisory Committee for Aeronautics* - Technical Note 3771, New York University, Washington, July 1957.
- [<sup>15</sup>] CHILVER, A. H. - Thin-Walled Structures - A Collection of Papers on the Stability and Strength of Thin Walled Structural Members and Frames, Chatto & Windys Ltd., New York, 1967.
- [<sup>16</sup>] LUNDQUIST, E. E. - Local Instability of Symmetrical Rectangular Tubes Under Axial Compression - *National Advisory Committee for Aeronautics*, Technical Note 686, Washington, 1939.
- [<sup>17</sup>] CHILVER, A. H. - A Generalised Approach to the Local Instability of Certain Thin-Walled Struts, *The Aeronautical Quarterly*, Volume IV, U.S.A., August, 1953, pp. 245-260.

- [<sup>18</sup>] HOUBOLT, J. C.; STOWELL, E. Z. - Critical Stress of Plate Columns, *National Advisory Committee for Aeronautics*, Technical Note 2163, Washington, 1950.
- [<sup>19</sup>] YUSUFF, S. - Primary Instability of a Panel of Integral, Construction with Unflanged Stiffeners, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 58, December, 1954.
- [<sup>20</sup>] CHILVER, A. H. - The Local Instability of a Simple Integral Panel, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 59, October 1955.
- [<sup>21</sup>] BULSON, P. S. - The Local Instability of Structural Sections with Flange Reinforcements, Symposium of thin Walled Steel Structures, University College of Swansea, 1967.
- [<sup>22</sup>] STOWELL, E. Z.; LUNDQUIST, E. E. - Local Instability of Columns with I, Z, Channel and Rectangular Tube Sections *National Advisory Committee for Aeronautics*, Technical Note 743, Washington, 1935.
- [<sup>23</sup>] STOWELL, E. Z.; LUNDQUIST, E. E. - Critical Compressive Stress for Flat Rectangular Plates Supported along all Edges and Elastically Restrained Against Rotation along the Unloaded Edges, NACA, Tech. Note 733, 1942.